Задача обслуживания единичных требований параллельными приборами

И.В. Уразова

ОмГУ им. Ф.М. Достоевского, кафедра ПОЗИ

Омск, 2020

Постановка задачи

Заданы множество V требований единичной длительности, m параллельных идентичных приборов, частичный порядок $\lessdot$ на V и директивный срок $d \in \mathbf{N}$. Требуется выяснить, существует ли такая функция $\sigma : V \to \{1, 2, \dots d\} = D$, что

- соотношение $i \lessdot j$ влечет неравенство $\sigma(i) < \sigma(j)$; (1)
- для любого $k \in D$ имеется не более m требований $i \in V$, таких, что $\sigma(i) = k$. (2)

Постановка задачи

Заданы множество V требований единичной длительности, m параллельных идентичных приборов, частичный порядок $\lessdot$ на V и директивный срок $d \in \mathbf{N}$. Требуется выяснить, существует ли такая функция $\sigma : V \to \{1, 2, \ldots d\} = D$, что

- соотношение $i \lessdot j$ влечет неравенство $\sigma(i) < \sigma(j)$; (1)
- для любого $k \in D$ имеется не более m требований $i \in V$, таких, что $\sigma(i) = k$. (2)

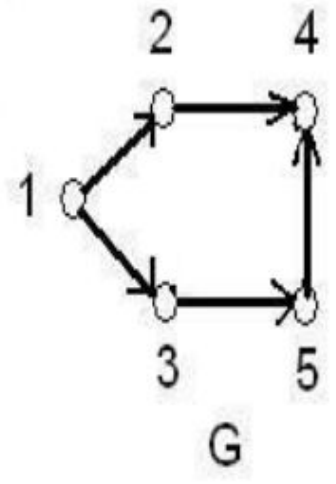
Множество всех расписаний, определенных условиями (1)-(2), обозначим через Σ_d. Задача заключается в минимизации общего времени обслуживания всех требований, т. е.

$$\max_{i \in V} \sigma(i) \to \min_{\sigma \in \Sigma_d} \tag{3}$$

Постановка задачи (продолжение)

G – граф, задающий частичный порядок на V. Требования множества V обслуживаются m параллельными идентичными приборами.

Пример



m=3

1	2	5	4	
	3			

Постановка задачи (продолжение)

UNIVERSITÄT OSNABRÜCK

Complexity results for scheduling problems

http://www.informatik.uni-osnabrueck.de/knust/class/

previous address:

http://www.mathematik.uni-osnabrueck.de/research/OR/class/

Idea: Peter Brucker
Realization: Sigrid Knust

Постановка задачи (продолжение)

- **minimal open:**

$P2|p_i = p; intree; r_i|C_{max}$

$Pm|p_i = 1; intree; r_i|C_{max}$

$Pm|p_i = 1; prec|C_{max}$

$Q2|p_i = p; chains; r_i|C_{max}$

$Q2|p_i = p; intree|C_{max}$

$Q2|p_i = p; outtree|C_{max}$

$Qm|p_i = p; chains|C_{max}$

$P2|p_i = p; chains; r_i|L_{max}$

$Pm|p_i = 1; outtree|L_{max}$

Постановка задачи (продолжение)

PMS (Parallel machine scheduling) NP-трудна (Ullman J.D. [1976])
Lenstra J.K., Rinnooy Kan A.H.G. [1978] (показано, что невозможно построить приближенный полиномиальный алгоритм с относительной погрешностью меньше $\frac{4}{3}$)

$$Pm|prec; p_j = 1|C_{max}$$

Полиномиально разрешимые случаи:
$Pm|tree; p_j = 1|C_{max}$ Hu T.C. [1961]
$P2|prec; p_j = 1|C_{max}$ Fujn M., Kasami T., Ninimiya K. [1969],
Coffman E.G., Graham R.L. [1972]

Содержание доклада

- Построение полиэдральной релаксации и ЦЛП-модели задачи;
- Построение классов неравенств, правильных относительно выпуклой оболочки расписаний;
- Разработка алгоритмов решения задачи на основе полученных полиэдральных свойств и их апробация.

Построение ЦЛП-модели для задачи обслуживания единичных требований параллельными приборами

$G = (V, E)$ – ациклический орграф.
Расписанию $\sigma : V \to D$ сопоставим $(0, 1)$-вектор
$x = (x_{ik},\ i \in V,\ k \in D) \in \mathbf{R}^{nd}$ по правилу:

$$x_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{если } \sigma(i) = k, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \tag{4}$$

Построение ЦЛП-модели.
Полиэдральная релаксация многогранника расписаний

$$\sum_{k \in D_i} x_{ik} = 1, \quad i \in V; \tag{5}$$

$$\sum_{i \in V_k} x_{ik} \le m, \quad k \in D; \tag{6}$$

$$x_{ik} \le \sum_{l \in D_j, l > k} x_{jl}, \quad (i,j) \in E(G), \quad k \in D_i; \tag{7}$$

$$0 \le x_{ik} \le 1, \quad i \in V, \quad k \in D; \tag{8}$$

$$x_{ik} = 0, \quad i \in V, \quad k \in D \setminus D_i. \tag{9}$$

Построение ЦЛП-модели

Полиэдральная релаксация многогранника расписаний

Известные решатели оптимизационных задач:

MATLAB

XPRESS

Gurobi

GAMS

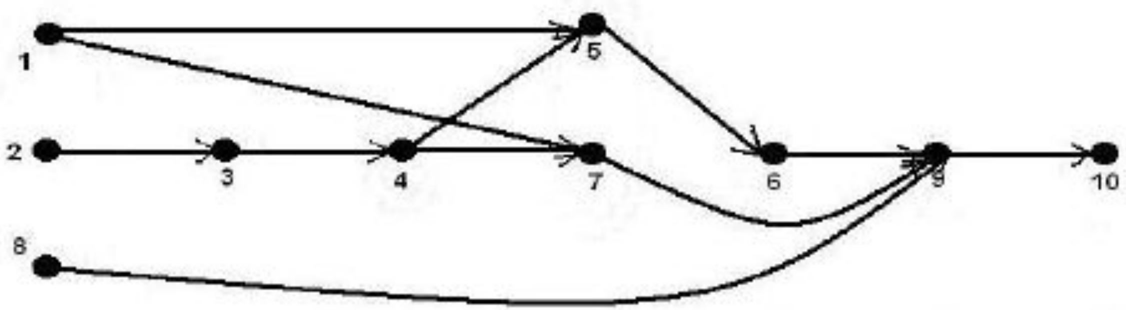
CPLEX

GNU GLPK

итд.

Построение ЦЛП-модели

Полиэдральная релаксация многогранника расписаний



*farmPlanning.mod

```
int n=10;
int m=3;
range V=1..n;
range D=1..n;
int c[V][D] = [
[10,  184, 63, 265, 191, 157, 114, 293, 269, 244],
[57, 281, 232, 168, 99,  4,   29, 119,  48, 54],
[323, 146, 39, 1, 2, 123, 174, 187, 197, 198],
[54, 217, 147, 115, 18, 199, 256, 262, 170, 98],
[287, 238, 313, 303, 176, 46, 151, 77, 282, 68],
[255, 276, 326, 327, 200, 128, 87, 97, 275, 7],
[123, 30, 221, 18, 2, 301, 90, 89, 192, 226],
[274, 238, 158, 67, 243, 153, 150, 311, 243, 35],
[196, 126, 240, 199, 187, 118, 49, 73, 139, 263],
[169, 324, 246, 113, 55, 215, 161, 20, 229, 165]];

tuple Edge{
int vi;
int vj;
}

{Edge} graph_G={<1,2>, <2,3>,<2,4>,<3,5>,<4,5>,<4,8>,
<5,6>,<5,7>,<5,9>,<6,10>,<8,9>,<9,10> };

dvar float  x[V][D];

dexpr float obj= sum(i in V, k in D) c[i][k]*x[i][k];
minimize obj;

subject to {

forall(i in V)
  sum(k in D) x[i][k] == 1;

forall(k in D)
  sum(i in V) x[i][k] <= m;

forall(e in graph_G)
  forall(k in D)
  x[e.vi][k] - sum(l in k+1..n)x[e.vj][l] <= 0;

forall(i in V)
  forall(k in D)
  x[i][k] >= 0;

forall(i in V)
  forall(k in D)
  x[i][k] <= 1;

}
```

Неполадки Протокол сценария Решения

```
// solution (optimal) with objective 587.5
// Quality There are no bound infeasibilities.
// There are no reduced-cost infeasibilities.
// Maximum Ax-b  residual              = 0
// Maximum c-B'pi residual             = 0
// Maximum |x|                         = 1
// Maximum |slack|                     = 3
// Maximum |pi|                        = 448
// Maximum |red-cost|                  = 0
// Condition number of unscaled basis = 1.6e+002
//

x = [[0.5
             0 0.5 0 0 0 0 0 0 0]
             [0.5 0 0 0.5 0 0 0 0 0 0]
             [0 0 0 0.5 0.5 0 0 0 0 0]
             [0.5 0 0 0 0.5 0 0 0 0 0]
             [0 0 0 0 0 1 0 0 0 0]
             [0 0 0 0 0 0 1 0 0 0]
             [0 0 0 0 0 0 0 1 0 0]
             [0 0 0 0.5 0 0.5 0 0 0 0]
             [0 0 0 0 0 0 1 0 0 0]
             [0 0 0 0 0 0 0 1 0 0]];
```

```
// solution (optimal) with objective 642
// Quality Incumbent solution:
// MILP objective                                      6.4200000000e+002
// MILP solution norm |x| (Total, Max)                 1.00000e+001 1.00000e+000
// MILP solution error (Ax=b) (Total, Max)             0.00000e+000 0.00000e+000
// MILP x bound error (Total, Max)                     0.00000e+000 0.00000e+000
// MILP x integrality error (Total, Max)               0.00000e+000 0.00000e+000
// MILP slack bound error (Total, Max)                 0.00000e+000 0.00000e+000
//

x = [[1
      0 0 0 0 0 0 0 0 0]
     [0 0 0 1 0 0 0 0 0 0]
     [0 0 0 0 1 0 0 0 0 0]
     [0 0 0 0 1 0 0 0 0 0]
     [0 0 0 0 0 1 0 0 0 0]
     [0 0 0 0 0 0 1 0 0 0]
     [0 0 0 0 0 0 0 1 0 0]
     [0 0 0 0 0 1 0 0 0 0]
     [0 0 0 0 0 0 1 0 0 0]
     [0 0 0 0 0 0 0 1 0 0]];

 Root node processing (before b&c):
   Real time             =    1.25 sec. (1.79 ticks)
```

Полиэдральная релаксация многогранника расписаний

Теорема 1.1. Целочисленные точки полиэдра (5)-(9) и только они являются расписаниями в смысле соотношения (4).

Полиэдр (5)-(9) обозначим $\mathbf{M_d} \subset \mathbf{R^{nd}}$.
Тогда $M_{\mathbf{Z}} = conv(\mathbf{M_d} \cap \mathbf{Z^{nd}})$ – выпуклая оболочка всех расписаний.

Построение ЦЛП-модели
Построение целевой функции

Для задачи

$$\max_{i\in V}\sigma(i) \to \min_{\sigma\in\Sigma_d} \tag{3}$$

построим соответствующую задачу целочисленного линейного программирования на полиэдре $\mathbf{M_d}$ с целевой функцией вида

$$h(x) = \sum_{k=1}^{d} \lambda_k \sum_{i\in V_k} x_{ik} \to \min_{x\in\mathbf{M_d}} \tag{10}$$

При этом $\lambda_1 \ll \lambda_2 \ll \ldots \ll \lambda_d$.

Условия существования расписаний

Вершинной базой орграфа G называется такое множество вершин $B \subseteq V(G)$, что полустепень захода каждой из них равна нулю.

$G - B_1 = G_1,\ G_1 - B_2 = G_2,\ \ldots,\ G_s - B_{s+1} = G_{s+1}$.

$B_1, B_2, \ldots, B_t$.

Теорема 1.4. Пусть $B_1,\ B_2, \ldots,\ B_t$ – разбиение множества вершин орграфа G на базы. Если $d \geq \sum\limits_{p=1}^{t} \lceil \frac{|B_p|}{m} \rceil$, то множество Σ_d непусто.

Условия существования расписаний

Утверждение 1.1.
1. Если $|B_{\max}| \leq m$, то $d_{\min} = |P_{\max}| + 1$.
2. Если $|B_{\max}| > m$, то $|P_{\max}| + 1 < d_{\min} < p_m$.

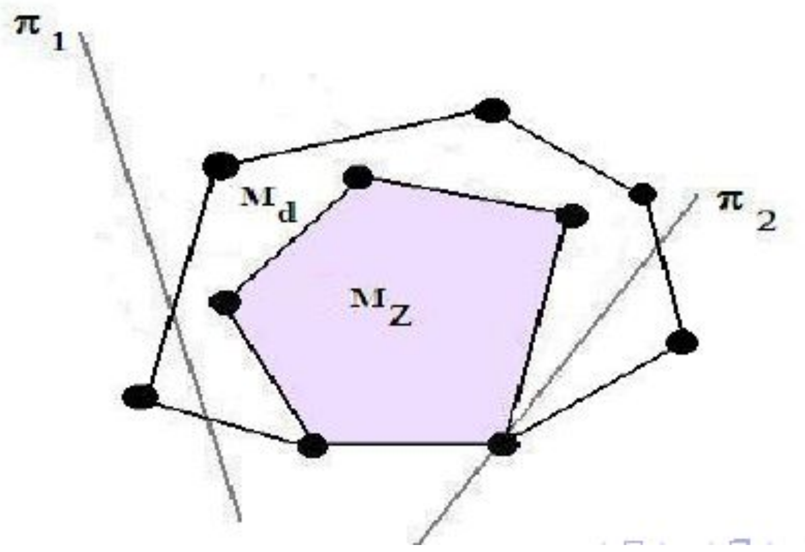
Здесь
$|B_{\max}|$ – мощность максимальной базы орграфа G;
$|P_{\max}|$ – длина максимального по числу дуг пути в орграфе G;
$p_m = \sum\limits_{s=1}^{t} \lceil \frac{|B_s|}{m} \rceil$ – плотность орграфа G относительно m
(m-плотность орграфа G).

Построение правильных неравенств

Неравенство $ax \le a_0$ называется **правильным** к многограннику $M_{\mathbf{Z}}$, если для всех $x \in M_{\mathbf{Z}}$ выполнено $ax \le a_0$.

Правильное неравенство называется **опорным**, если существует $\bar{x} \in M_{\mathbf{Z}}$, что $a\bar{x} = a_0$.

Будем говорить, что неравенство $ax \le a_0$ отсекает точку $\tilde{x}$, если $a\tilde{x} > a_0$.



Классы правильных неравенств для многогранника расписаний

Пусть $P \subset G$ – путь, $k \in D$. Тогда неравенство
$$\sum_{j \in V(P)} x_{jk} \leq 1 \tag{11}$$
является правильным к многограннику $M_{\mathbf{Z}}$.

Теорема 2.1. Пусть $P \subset G$ – путь, $k \in D$, $i \in V(P)$ – первая вершина пути P, $z \in V(P)$ – последняя вершина пути P. Тогда неравенство вида
$$\sum_{l=1}^{k-1} x_{zl} + \sum_{j \in V(P)} x_{jk} + \sum_{l=k+1}^{d} x_{il} \leq 1 \tag{12}$$
правильно относительно $M_{\mathbf{Z}}$.

Класс неравенств вида (11) обозначим через I, вида (12) через IZ.

Классы правильных неравенств для многогранника расписаний

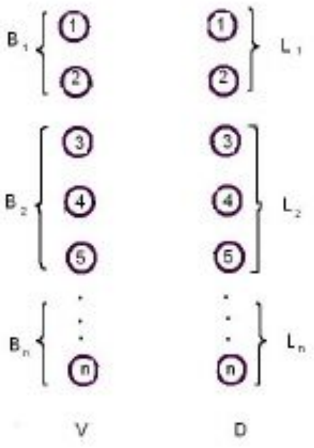
Теорема 2.2. Пусть $V_1, V_2, \ldots, V_t \subset V$ – вершинно-непересекающиеся подмножества множества вершин из V в орграфе G, $k \in D$. При этом для любых $i \in \{1, 2, \ldots, t-1\}$ множества V_i, V_{i+1} индуцируют полный двудольный орграф с началами дуг в V_i и концами в V_{i+1}. Тогда неравенство

$$\sum_{i \in V_1} \sum_{l=k}^{d} x_{il} + \sum_{j=1}^{t} \sum_{i \in V_j} x_{ik} + \sum_{i \in V_t} \sum_{l=1}^{k} x_{il} \leq \max(|V_1|, \ldots, |V_t|) \qquad (13)$$

является правильным относительно $M_{\mathbf{Z}}$.

Класс неравенств вида (13) обозначим через ID.

Некоторые условия опорности



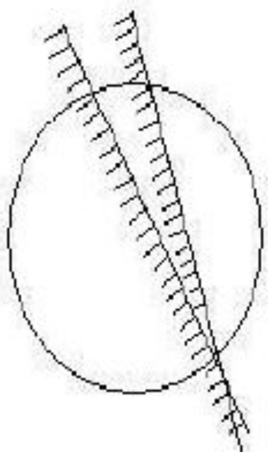
$p(i)$ – уровень базы, содержащей вершину i.

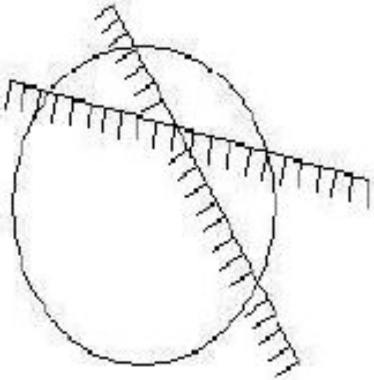
Теорема 2.3. Пусть $P \subset G$ путь, $\{i_1, i_2, \dots, i_p\} \subseteq V(P)$, $k \in \bigcup_{s=1}^{p} L_{p(i_s)}$. Тогда неравенства классов I, IZ являются опорными к многограннику $M_{\mathbf{Z}}$.

Сравнение построенных неравенств

Неравенство $ax \leq a_0$ не сильнее неравенства $bx \leq b_0$ относительно $\mathbf{M_d}$, если $\{x \in \mathbf{M_d} | ax > a_0\} \subseteq \{x \in \mathbf{M_d} | bx > b_0\}$.

Будем говорить, что неравенства $ax \leq a_0$ и $bx \leq b_0$ эквивалентны (относительно $\mathbf{M}_d$), если выполнено равенство $\{x \in \mathbf{M}_d \mid ax = a_0\} = \{x \in \mathbf{M}_d \mid bx = b_0\}$.





Сравнение построенных неравенств

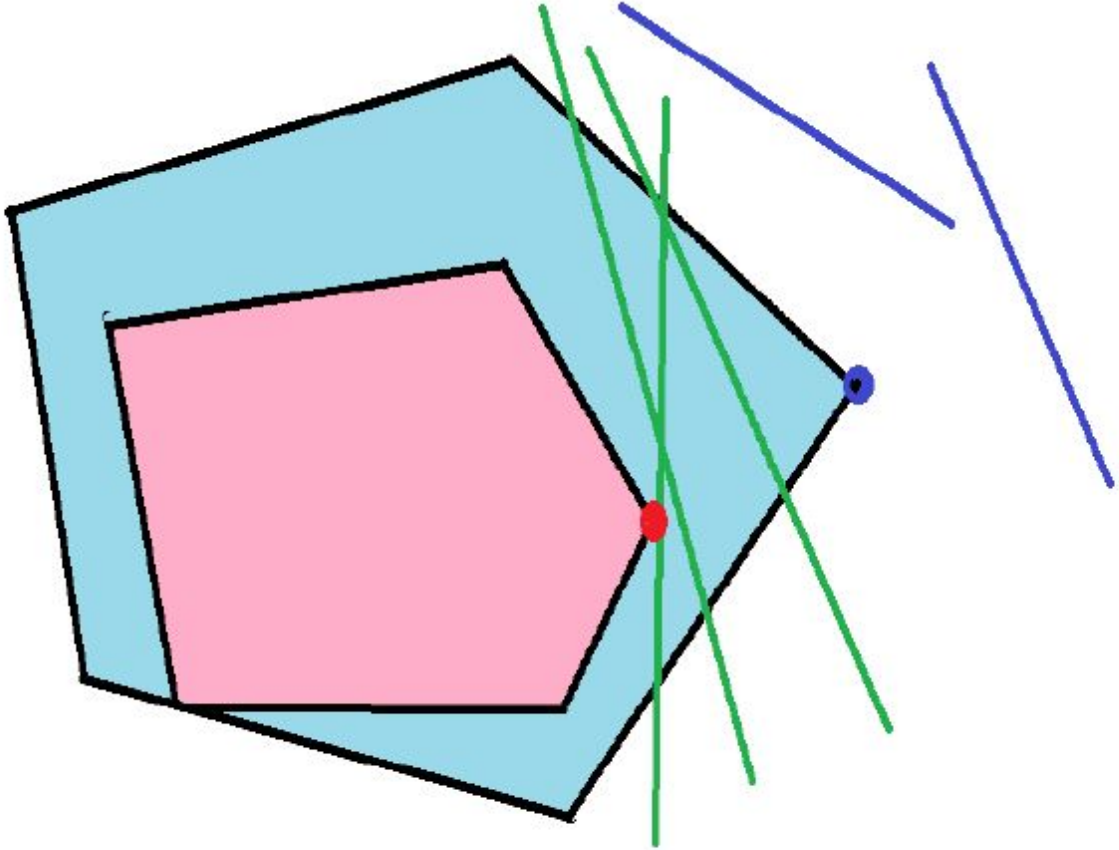
Утверждения 2.1. – 2.4.

$$\boxed{\sum_{j \in V(P)} x_{jk} \leq 1 \qquad (11)}$$

$$\boxed{\sum_{j \in V(P)} x_{jk} + \sum_{l=k+1}^{d} x_{il} \leq 1 \qquad (12)} \quad \boxed{\sum_{l=1}^{k-1} x_{zl} + \sum_{j \in V(P)} x_{jk} \leq 1 \qquad (13)}$$

$$\boxed{\sum_{l=1}^{k-1} x_{zl} + \sum_{j \in V(P)} x_{jk} + \sum_{l=k+1}^{d} x_{il} \leq 1 \qquad (14)}$$

Решение задачи идентификации



Решение задачи идентификации

Алгоритм *SPI* решения задачи идентификации неравенства класса *I*

Дано $\bar{x} \in \mathbf{M}_d \backslash \mathbf{M}_Z$.

k-я итерация, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Шаг 1. В графе $G_{\bar{x},k}$ находим максимальный по весу путь $P_{\bar{x},k}$.

Шаг 2. Если $\sum\limits_{j \in V(P_{\bar{x},k})} \bar{x}_{jk} > 1$, то шаг 4. Иначе – шаг 3.

Шаг 3. Если $k < d$, то переход на $(k+1)$-ю итерацию. Иначе – конец: в классе I нет неравенства, отсекающего точку $\bar{x}$.

Шаг 4. Конец: неравенство $\sum\limits_{j \in V(P_{\bar{x},k})} x_{jk} \leq 1$ является искомым неравенством, отсекающим точку $\bar{x}$.

Теорема 2.4. Алгоритм *SPI* решения задачи идентификации неравенств класса *I* имеет трудоемкость $O(n^3)$.

Решение задачи идентификации

Теорема 2.5. Алгоритм SPZ решения задачи идентификации неравенств класса IZ имеет трудоемкость $O(n^3)$.

Для класса ID разработана эвристическая процедура, основанная на задаче поиска максимального по весу полного двудольного подграфа в заданном вершинно-взвешенном двудольном орграфе.

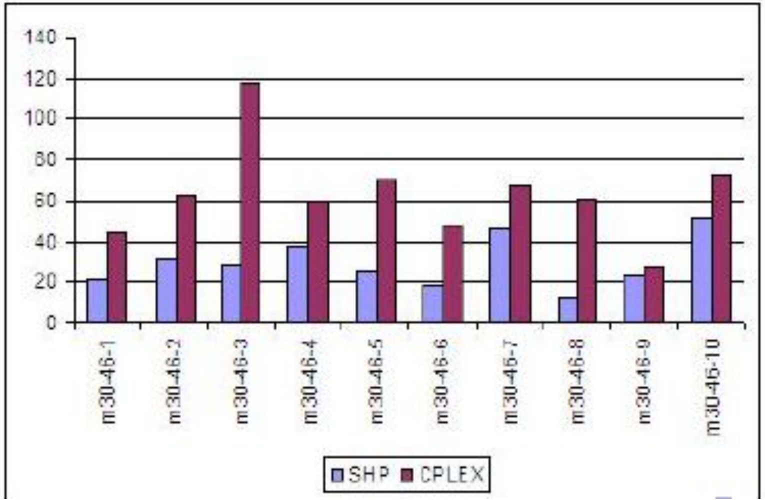
Апробация алгоритмов

Цели:

- сравнение алгоритма *SHP* с пакетом CPLEX по количеству отсечений и времени работы;
- сравнение алгоритмов *IPI* и *SHP* по количеству отсечений и времени работы;
- сравнение работы алгоритма *SHP* по количеству отсечений и времени на задачах с различным числом параллельных приборов $m = 2, 3, 4, 5$;
- поиск таких зависимостей между коэффициентами λ_k целевой функции (10), которые позволили бы избавиться от их экспоненциального роста.

Таблица 3.1.2. Сравнение алгоритма *SHP* и пакета CPLEX по количеству отсечений и времени (сек.)

n	Inq_{med}	CPL_{med}	T_{med}	T^{CPL}_{med}
10	5	15	0,087	0,391
18	9	17	1,226	3,157
30	29,5	71	15,245	55,273
60	78,5	222	2658,043	8839,012
120	244	-	3712,15	-



Выбор коэффициентов целевой функции

$$h(x) = \sum_{k=1}^{d} \lambda_k \sum_{i \in V_k} x_{ik} \to \min_{x \in \mathbf{M_d}} \qquad (10)$$

$$m \sum_{\ell=1}^{k} \lambda_\ell \leq \lambda_{k+1}, \; k = 1, 2, \ldots, d-1$$ (Теоремы 1.2 и 1.3)

$\lambda_k = f_{lin}(k) = nk$

$\lambda_k = f_{sq}(k) = nk^2$

Список публикаций по теме диссертации

1. Симанчев Р.Ю., Уразова И.В. *Целочисленная модель задачи минимизации общего времени обслуживания параллельными приборами единичных требований с предшествованиями* // **Автоматика и телемеханика**, 2010. N 10. – С. 100-106.

2. Симанчев Р.Ю., Уразова И.В. *Многогранник расписаний обслуживания идентичных требований параллельными приборами* // **Дискретный анализ и исследование операций**, 2011. N 1. – С. 82-97.

3. Уразова И.В. *Класс правильных неравенств для задачи упаковки вершин ациклического орграфа в полосу заданной ширины* // **Вестник ОмГУ им. Ф.М. Достоевского**, 2011. N2(60). – С. 48 52.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!