ОмГУ, кафедра ПОЗИ

Обслуживание требований одним прибором с прерываниями

Р. Ю. Симанчев

Омск
2020

Требования из множества V, $|V| = n$, имеющие положительные веса w_i, обслуживаются одним прибором.
Для каждого требования $i \in V$ определен момент ожидания r_i, до котрого

включительно оно недоступно для обработки. Длительности обслуживания одинаковы и равны p. Время предполагается дискретным.
В обслуживании разрешены прерывания.

Необходимо найти расписание обслуживания такое, что взвешенная сумма

моментов окончания обслуживания требований минимальна.

$$1|pmtn; p_i = p; r_i| \sum w_i C_i$$

При условии произвольных длительностей обслуживания и возможности прерываний ($1|pmtn; r_i|\sum w_iC_i$) задача является NP-трудной.

В случае, когда прерывания запрещены задача $1|p_i = p; r_i|\sum w_iC_i$ является полиномиально разрешимой.

Если не учитываются веса требований, разрешены прерывания и длительности обработки произвольны ($1|pmtn; r_i|\sum C_i$), задача вновь полиномиально разрешима.

$1|pmtn; p_i = 2; r_i| \sum w_i C_i$ полиномиально разрешима

$1|pmtn; p_i = 2; r_i| \sum w_i C_i$ (частный случай $p = 2$)

полиномиально разрешима (Bouma, Goldengorin, 2010)

$1|pmtn; p_i = p; r_i| \sum w_i C_i$ (наша задача)

сложностной статус неизвестен.

Расписанием обслуживания требований является $(0,1)$-вектор $x \in R^{nd}$ с координатами $x_{ik} \in \{0,1\}$, $i \in V$, $k \in D$. Единица означает, что требование i в момент времени k находится в обработке, нуль – иначе.

$$\sum_{k \in D} x_{ik} = p, i \in V, \tag{1}$$

$$\sum_{i \in V} x_{ik} \leq 1, k \in D, \tag{2}$$

$$x_{ik} \geq 0, i \in V, k = r_i + 1, r_i + 2, \ldots, d, \tag{3}$$

$$x_{ik} = 0, i \in V, k = 1, 2, \ldots, r_i, \tag{4}$$

$$x_{ik} \in \{0,1\}, i \in V, k \in D. \tag{5}$$

Целевая функция? Минимизировать

$$f(x) = \sum_{i \in V} w_i C_i(x) \tag{6}$$

на вершинах полиэдра (1)-(4).

Дополнительные целые неотрицательные переменные y_i, $i \in V$, с условиями

$$k x_{ik} \leq y_i, i \in V, k \in D. \tag{7}$$

Теперь задача может быть формализована как задача минимизации функции

$$g(x, y) = \sum_{i \in V} w_i y_i \tag{8}$$

при условиях $\{(1) - (5), (7)\}$.

Если $(\overline{x}, \overline{y})$ - оптимальное решение задачи {(1)-(5),(7),(8)} , то $\overline{x}$ - оптимальное решение задачи (6).

Рассмотрим три множества:

V – множество требований,

D – множество моментов времени, в которые обслуживаются требования,

Y – дубликат V (это вспомогательное множество, с помощью которого будут подсчитываться моменты окончания обслуживания требований)

Пусть $G_1 = (V, D; E_1)$ – полный двудольный граф с долями V и D и множеством

ребер $E_1 = \{ik | i \in V, k \in D\}$,

$G_2(Y, V; E_2)$ – полный двудольный граф с долями Y и D и множеством ребер $E_2 = \{ik | i \in Y, k \in D\}$.

Рассмотрим $G = G_1 \cup G_2$. В G определим семейство подграфов $\mathcal{H}$ по правилу.

Подграф $H \subset G$, $H = H_1 \cup H_2$, $H_1 \subset G_1$, $H_2 \subset G_2$ принадлежит семейству $\mathcal{H}$ (называется расписанием), если

$$d_{H_1}(i) = p, i \in V$$

$$d_{H_1}(k) \leq 1, k \in D$$

для $i \in Y$ и $k \in D$ включение $ik \in EH_2$ имеет место тогда и только тогда, когда существует $l \in D$, $l > k$, такой, что $il \in EH_1$.

На рис. приведен фрагмент такого графа $H \in \mathcal{H}$ для вершины $i = 3$

Данная конструкция позволяет сформулировать рассматриваемую задачу в виде

$$min\{\sum_{i \in Y} w_1 d_{H_2}(i) | H \in \mathcal{H}\}.$$

Пусть $R^E = R^{E_1} \times R^{E_2}$.

Оси координат в R^{E_1} будем обозначать x_{ik}, в R^{E_2} – через y_{ik}.

Пусть $H \in \mathcal{H}$.

Вектором инциденций подграфа $H = H_1 \cup H_2$ назовем вектор $\{x^{H_1}, y^{H_2}\} \in R^{E_1} \times R^{E_2}$ с координатами

для $i \in V$, $k \in D$ $x_{ik}^{H_1} = \begin{cases} 1, & \text{если } ik \in EH_1; \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$

для $i \in Y$, $k \in D$ $y_{ik}^{H_2} = \begin{cases} 1, & \text{если } ik \in EH_2; \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$

Теперь с множеством расписаний $\mathcal{H}$ можно связать многогранник

$$P_{\mathcal{H}} = conv\{(x^{H_1}, y^{H_2}) \in R^E | H = H_1 \cup H_2 \in \mathcal{H}\}.$$

Теорема 39.

Подграф $H = H_1 \cup H_2 \in G$ принадлежит семейству $\mathcal{H}$ (является расписанием) тогда и только тогда, когда его вектор инциденций $\{x^{H_1}, y^{H_2}\} \in R^E$ является целочисленной точкой полиэдра, заданного ограничениями $(1) - (4)$ и

$$\sum_{l=k+1}^{d} x_{il} \leq p y_{ik}, i \in V(= Y), k = 1, 2, \ldots, d-1,$$

$$y_{ik} \leq \sum_{l=k+1}^{d} x_{il}, i \in V(= Y), k = 1, 2, \ldots, d-1,$$

$$y_{ik} \leq 1, i \in Y, k \in D.$$

- полиэдр $M_{\mathcal{H}}$.

Теперь задачу можно сформулировать как задачу булева программирования вида

$$min\{h(x,y) = \sum_{i \in Y} \sum_{k \in D} w_i y_{ik} | (x,y) \in M_{\mathcal{H}} \cap Z^E\}.$$

Утверждение 26.

Многогранник $P_{\mathcal{H}}$ целиком лежит в каждой из гиперплоскостей, задаваемых неравенствами $\sum\limits_{k=1}^{r_i+p-1} y_{ik} = r_i + p - 1,\ i \in V$.

Утверждение 27.

Неравенство $x_{ik} \le y_{i(k-1)}$ является правильным относительно многогранника $P_{\mathcal{H}}$ для любых $i \in V$ и $k \in \{2, 3, \ldots, d\}$.

Утверждение 28.

Неравенство $\sum\limits_{i \in V} y_{ik} \ge n - \lfloor k/n \rfloor$ является правильным относительно многогранника $P_{\mathcal{H}}$ при любом $k \in \{1, 2, 3, \ldots, d-1\}$.

Цель эксперимента: Сравнение полиэдральных релаксаций задачи.
Рассматривались три релаксации:

Первая модель (m1),
Вторая модель (m2),
Вторая модель, усиленная построенными правильными неравенствами (m2_add).
Для решения задач ЦЛП использовался пакет CPLEX.

В ходе эксперимента генерировались серии задач с предварительно заданными значениями параметров n и p. Параметры ω_i выбирались случайным образом из интервала от 1 до 100. Значения r_i выбирались так, чтобы для каждой задачи $d_{min} = pn$.

Сгенерированные задачи запускались поочерёдно на различных моделях. Задача считалась нерешённой, если время решения превышало 30 минут.

В таблице представлены результаты запусков решения задач $m1$, $m2$ и m2_add на различных входных данных. Число требований n менялось от 5 до 75, время обработки p= 3,4,5.

Для каждого n было решено 25 задача с различными входными параметрами. Сравнение проводилось по среднему времени решения задач.

n	p	$m1$	$m2$	$m2\_add$
10	3	63.07	2.30	0.23
10	5	264.61	9.64	0.45
15	3	379.36	34.80	1.14
15	5	-	101.09	1.82
20	3	-	80.11	4.53
20	5	-	611.24	20.77
25	3	-	541.45	8.51
25	5	-	-	152.70
30	3	-	881.30	13.56
30	5	-	-	206.27
40	3	-	-	92.76
40	5	-	-	445.81
50	3	-	-	104.28
50	5	-	-	663.15
60	3	-	-	311.45
60	5	-	-	1583.31
70	3	-	-	1217.18
70	5	-	-	-

Таблица: Результаты запусков решения задач $m1$, $m2$ и m2_add на различных входных данных.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!