Решение задач дискретной оптимизации с интервальной целевой функцией

А.В. Пролубников

Омский государственный университет

a.v.prolubnikov@mail.ru

16.10.20

ЗАДАЧА (I)

Дано:

- $E = \{e_1, \ldots, e_n\}$;
- $w(e) > 0$ — веса $e \in E$, $w_i = w(e_i) \in \mathbb{R}_+$;
- множество допустимых решений $\mathcal{D}$:
  $x = (x_1, \ldots, x_n)$ определяет подмножество $E_x \subset E$: $e_i \in E_x \Leftrightarrow x_i = 1$.

Найти:

$\dot{x} \in \mathcal{D}$ такой, что

$$f(\dot{x}, w) = \min_{x \in \mathcal{D}} \sum_{e \in E_x} w(e).$$

$x \in \mathcal{D}$ — «x один из подграфов заданного вида»:

- гамильтонов цикл;
- путь, соединяющий две вершины в графе;
- остовное дерево

и т.д.

Задачи дискретной оптимизации:

- задача коммивояжёра;
- задача об остовном дереве минимального веса;
- задачи о минимальном (рёберном, вершининином) покрытии;
- задача о рюкзаке

и др.

Измерения почти всегда не точны!
— получены *с некоторой точностью*, которая характеризуется:

- радиусом интервала,
- (возможно) вероятностным распределением на интервале.

Дано:

- $E = \{e_1, \ldots, e_n\}$;
- $\boldsymbol{w}(e) > 0$ — веса $e \in E$, $\boldsymbol{w}_i = \boldsymbol{w}(e_i)$, $\boldsymbol{w}_i \in \mathbb{IR}_+$
  — интервальная целевая функция $\boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{w})$;
- множество допустимых решений $\mathcal{D}$:
  $x = (x_1, \ldots, x_n)$ определяет подмножество $E_x \subset E$: $e_i \in E_x \Leftrightarrow x_i = 1$.

Найти?

Вместо одного решения — множество возможных решений
для всех *реализаций (сценариев)* $w \in \mathbb{R}^n$, $w \in \boldsymbol{w}$.

Подходы к работе с неопределёностями:

- точечные методы,
- нечёткие множества,
- вероятностные методы,
- интервальный анализ

и др.

Интервальный анализ — работа с интервальными величинами:

- интервалы — $\mathbb{IR}$
- интервальные векторы — $\mathbb{IR}^n$
- интервальные матрицы — $\mathbb{IR}^{m \times n}$

$$\boldsymbol{a} * \boldsymbol{b} = \{a * b \mid a \in \boldsymbol{a},\ b \in \boldsymbol{b}\}.$$

Задачи оценивания множеств интервальными множествами (множества значений функции, множества решений ИСЛАУ и др.)

ПОДХОДЫ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ (II)

В случае интервальных весов $(\mathbf{w}_i \in \mathbb{IR})$

разные концепции оптимального решения — разные подходы:

- поиск **единственного решения:**
  - *робастное* решение,
  - *сильное* решение
- поиск **множества решений:**
  - множества решений оптимальных по Парето,
  - множество всех возможных оптимальных решений,
  - множество всех возможных приближённых решений.

Во всех случаях задача труднорешаема

РОБАСТНОЕ РЕШЕНИЕ

1). *При каких наибольших изменениях неточно заданных параметров полученное для них решение задачи ДО остаётся оптимальным?*
2). *Какое из возможных оптимальных решений будет наиболее устойчиво, то есть будет оставаться оптимальным при наибольших изменениях значений параметров?*
3). *Как меняется оптимальное решение при малых изменениях неточно заданных параметров?*

Найти такое $\check{x} \in \mathcal{D}$ — *абсолютное робастное решение*, что

$$\max_{w \in \mathbf{w}} f(\check{x}, w) = \min_{x \in \mathcal{D}} \max_{w \in \mathbf{w}} f(x, w), \tag{1}$$

или такое $\check{x} \in \mathcal{D}$ — *относительное робастное решение*, что

$$\max_{w \in \mathbf{w}} \big(f(\check{x}, w) - f^*(w)\big) = \min_{x \in \mathcal{D}} \max_{w \in \mathbf{w}} \big(f(x, w) - f^*(w)\big), \tag{2}$$

где $f^*(w)$ — вес оптимального решения при реализации w.

ВАРИАНТЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ РЕШЕНИЯ

- x — *слабое оптимальное решение*:
  $\exists w \in \boldsymbol{w}$ т.ч. x — опт. решение;
- x — *сильное оптимальное решение*:
  $\forall w \in \boldsymbol{w}$ т.ч. x — опт. решение.

Сильного опт. решения, как правило, не существует!

Объединённое множество решений

- оптимальных решений — Ξ:

$$\Xi = \left\{ x \in \mathcal{D} \;\middle|\; \exists w \in \boldsymbol{w} \;\left(f(x, w) = \min_{y \in \mathcal{D}} f(y, w) \right) \right\};$$

- приближённых решений — $\tilde{\Xi}_\alpha$:

$$\tilde{\Xi}_\alpha = \left\{ x \in \mathcal{D} \;\middle|\; \exists w \in \boldsymbol{w} \;\left(f(x, w) \leq \alpha \min_{y \in \mathcal{D}} f(y, w) \right) \right\}.$$

ЗАДАЧА О ПОКРЫТИИ МНОЖЕСТВА

Дано: $U = \{1, \ldots, m\}$; $S = \{S_1, \ldots, S_n\}$, $S_i \subseteq U : \cup_{i=1}^{n} S_i = U$.

$$S' = \{S_{i_1}, \ldots, S_{i_k}\} \text{ — **покрытие** } U, \text{ если } \cup_{j=1}^{k} S_{i_j} = U$$

Функция веса: $w : S \to \mathbb{R}_+$, $w_i = w\,(S_i)$ — вес множества S_i

Найти: покрытие S' минимального веса:

$$w\,(S') = \sum_{j=1}^{k} w\,(S_{i_j}) \to \min$$

Дано: $U = \{1, \ldots, m\}$; $S = \{S_1, \ldots, S_n\}$, $S_i \subseteq U : \cup_{i=1}^{n} S_i = U$.

$S' = \{S_{i_1}, \ldots, S_{i_k}\}$ — **покрытие** U, если $\cup_{i=1}^{k} S_{i_j} = U$

Интервальная функция веса $\boldsymbol{w} : S \to \mathbb{IR}_+$
($\mathbb{IR}_+ = \{\boldsymbol{x} = [\underline{\boldsymbol{x}}, \overline{\boldsymbol{x}}] \in \mathbb{IR} \mid \underline{\boldsymbol{x}} \geq 0\}$)

Найти:

$$\Xi = \Big\{x \in \mathcal{D} \;\Big|\; \exists w \in \boldsymbol{w} \;\Big(f(x, w) = \min_{y \in \mathcal{D}} f(y, w)\Big)\Big\};$$

или

$$\tilde{\Xi}_\alpha = \Big\{x \in \mathcal{D} \;\Big|\; \exists w \in \boldsymbol{w} \;\Big(f(x, w) \leq \alpha \min_{y \in \mathcal{D}} f(y, w)\Big)\Big\}.$$

ОБЪЕДИНЁННОЕ ОПТИМАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ Ξ

- *Объединённое оптимальное решение* $\Xi = \{Opt_1, \dots, Opt_k\}$ —

это такой набор слабых оптимальных решений, что для любой реализации $w \in \boldsymbol{w}$ найдётся $Opt_i \in \Xi$ т.ч. Opt_i — оптимальное решение точечной задачи с весами w.

Задача нахождения Ξ

1) найти Ξ;
2) для каждого $Opt_i \in \Xi$ указать значения, которые могут принимать веса множеств из Opt_i при его оптимальности $\Rightarrow$ получение интервала возможных значений целевой функции для оптимальных решений;
3) если веса множеств — случайные величины, принимающие значения $w \in \boldsymbol{w}_i$, и заданы распределения вероятностей реализаций w на $\boldsymbol{w}_i$, то определить вероятности получения реализаций, при которых эти покрытия являются оптимальными.

Объединённое приближённое решение $\tilde{\Xi}$

Приближённое решение — решение, получаемое с помощью жадного алгоритма для некоторой реализации $w \in \boldsymbol{w}$.

Вероятность приближённого решения — вероятность получения реализации $w \in \boldsymbol{w}$, т.ч. для неё будет получено это решение.

Объединённое приближённое решение $\tilde{\Xi}$

— набор приближённых решений с гарантированной точностью для всех возможных реализаций $w \in \boldsymbol{w}$.

Приближённое решение на стадии поиска рассматривается нами как *упорядоченный* набор множеств.

ПРИБЛИЖЁННОЕ РЕШЕНИЕ, ТОЧНОСТЬ

ЗАДАЧА О ПОКРЫТИИ МНОЖЕСТВА *NP*-ТРУДНА $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ нахождение приближённых решений с гарантированной точностью

Жадный алгоритм — трудоёмкость $O(nm^2)$.
Гарантированная точность:

$$\frac{w(Gr)}{w(Opt)} \leq H(m) \leq \ln m + 1,$$

где $H(m) = \sum_{k=1}^{m} 1/k$, Gr — покрытие, получаемое с помощью жадного алгоритма, Opt — оптимальное покрытие.

— ОЦЕНКА $O(\ln m)$ НЕУЛУЧШАЕМА
ДЛЯ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ АЛГОРИТМОВ
(при условии $P \neq NP$)

ЖАДНЫЙ АЛГОРИТМ (ТОЧЕЧНЫЙ) РЕШЕНИЯ

Жадный алгоритм решения

1 $Gr := \varnothing$.

2 **if** Gr — покрытие U,

3 работу алгоритма завершить.

4 **else** выбрать q т.ч.

$$w_q/|S_q| = \min\left\{ w_i/|S_i| \;\middle|\; S_i \in S \text{ и } S_i \not\subset \bigcup_{j \in Gr} S_j \right\},$$

5 $Gr := Gr \cup \{S_q\}$,

6 $\forall i: \; S_i := S_i \setminus S_q$.

7 Перейти на шаг 2.

Задача $\mathcal{P}$: $U_{\mathcal{P}}$, $S_{\mathcal{P}}$, $w_{\mathcal{P}}$.

Итерация жадного алгоритма решения:

Имеем задачу $\mathcal{P}$.

1) выбираем S_q т.ч.

$$w_q/|S_q| = \min\left\{ w_i/|S_i| \;\middle|\; S_i \in S \text{ и } S_i \not\subset \bigcup_{j \in Gr} S_j \right\};$$

2) выбранное множество добавляем в покрытие: $Gr := Gr \cup \{S_q\}$;
3) получаем задачу $\mathcal{P}'$:
   - $U' \leftarrow U \setminus S_q$, $S'_j \leftarrow S_j \setminus S_q$, $w' \leftarrow w$.

— переход от задачи $\mathcal{P}$ к задаче $\mathcal{P}'(U', S', w)$

ИНТЕРВАЛЬНЫЙ ЖАДНЫЙ АЛГОРИТМ

Задача $\mathcal{P}$: $U_{\mathcal{P}}$, $S_{\mathcal{P}}$, $\boldsymbol{w}_{\mathcal{P}}$.

Итерация интервального жадного алгоритма:

Имеем задачу $\mathcal{P}$.

1) находим $Q = \{S_{i_1}, \dots, S_{i_q}\}$ $(|Q| = t)$, где $S_{i_j} \in Q$, если $\exists w \in \boldsymbol{w}_{\mathcal{P}}$ т.ч.

$$w_{i_j}/|S_{i_j}| = \min\left\{ w_i/|S_i| \;\middle|\; S_i \in S_{\mathcal{P}} \text{ и } S_i \not\subset \bigcup_{j \in Gr} S_j \right\};$$

2) получаем варианты построения Gr: $Gr \leftarrow Gr \cup \{S_{i_1}\}, \dots, Gr \leftarrow Gr \cup \{S_{i_q}\}$;
3) получаем задачи $\mathcal{P}^{(i_1)}, \dots, \mathcal{P}^{(i_q)}$ с полученными $U_{\mathcal{P}^{(i_j)}}$, $S_{\mathcal{P}^{(i_j)}}$, $\boldsymbol{w}_{\mathcal{P}^{(i_j)}}$, $j = \overline{1, t}$.

Итерация интервального жадного алгоритма:

Имеем интервальную задачу $\mathcal{P}$.

1) перебираем варианты — множества — интервалы реализаций, при которых точечным алгоритмом в покрытие Gr могут быть выбраны множества $\{S_{i_1},\ldots,S_{i_q}\} = Q$ $(Q \subseteq S)$
2) варианты построения Gr: $Gr := Gr \cup \{S_{i_1}\},\ldots, Gr := Gr \cup \{S_{i_q}\}$;
3) получаем интервальные задачи $\mathcal{P}^{(i_1)},\ldots,\mathcal{P}^{(i_q)}$ $(t = |Q|)$:

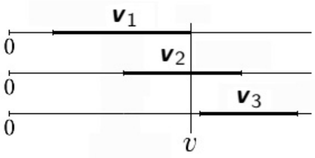
$\mathcal{P}^{(i_1)}$	$\ldots$	$\mathcal{P}^{(i_q)}$
$U^{(i_1)} \leftarrow U \setminus S_{i_1}$,	$\ldots$	$U^{(i_q)} \leftarrow U \setminus S_{i_q}$,
$S_j^{(i_1)} \leftarrow S_j^{(i_1)} \setminus S_{i_1}$,	$\ldots$	$S_j^{(i_q)} \leftarrow S_j^{(i_q)} \setminus S_{i_q}$,
$\mathbf{w}^{(i_1)} \subseteq \mathbf{w}$	$\ldots$	$\mathbf{w}^{(i_q)} \subseteq \mathbf{w}$

МНОЖЕСТВО Q — ВАРИАНТЫ ВЫБОРА

- $\boldsymbol{v}_i$ — интервал относительных весов для S_i: $\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{w}_i/|S_i|$

$S = \{S_1, S_2, S_3\}$:

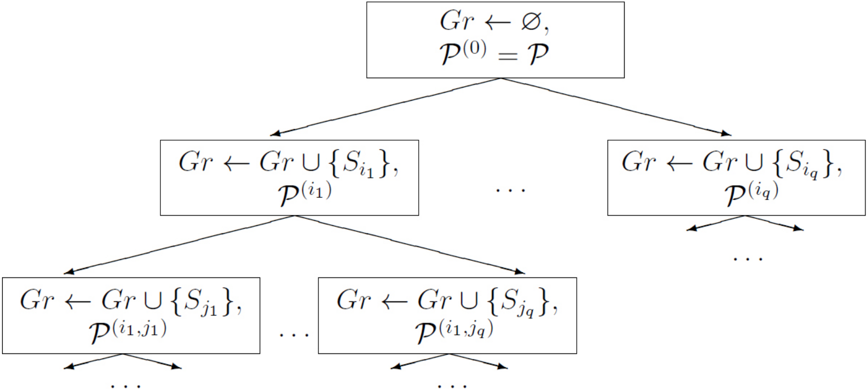
$$\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{w}_1/|S_1|,$$
$$\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{w}_2/|S_2|,$$
$$\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{w}_3/|S_3|.$$



$\Rightarrow$ в Q будут выбраны множества S_1 и S_2

ДЕРЕВО ПОИСКА ПРИБЛИЖЁННЫХ РЕШЕНИЙ

$\mathcal{P}^{(i_1,\ldots,i_k)}$ — задача, получаемая из $\mathcal{P}$ при последовательном выборе в Gr мн-в $S_{i_1}, \ldots, S_{i_k}$.



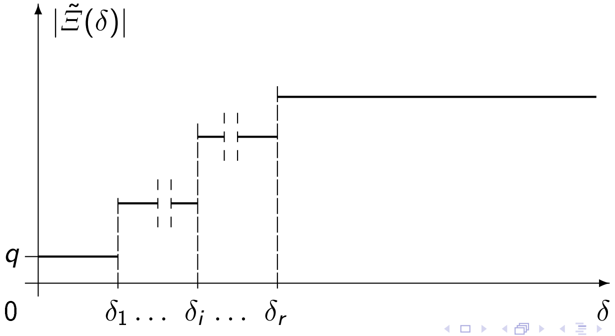
Выч. сложность нахождения $\tilde{\Xi}$

$|\tilde{\Xi}|$ — параметр, характеризующий вычислительную сложность $C(\mathcal{P})$ решения задачи $\mathcal{P}$:

$$O(m^2 n) \cdot |\tilde{\Xi}| \leq C(\mathcal{P}) \leq (O(m^2 n) + mC'(\mathcal{P})) \cdot |\tilde{\Xi}|,$$

где $C'(\mathcal{P})$ — сложность процедуры вычисления вероятностей.

- зависимость $|\tilde{\Xi}(\delta)|$ от величины радиусов интервалов:



РЕЗУЛЬТАТЫ ПРИМЕНЕНИЯ АЛГОРИТМА:

В результате применения алгоритма получаем:

1) объединённое приближённое решение $\tilde{\tilde{\Xi}}$
(если $\mathcal{D}$ — матроид, то $\tilde{\tilde{\Xi}} = \Xi$);
2) вероятности получения решений из $\tilde{\tilde{\Xi}}$;
3) множество возможных значений целевой функции для них (набор интервалов) и распределение на нём;
4) средние значения, отклонения и пр. вероятн. характеристики.

$\Rightarrow$ **<u>АНАЛИЗ МНОЖЕСТВА ВОЗМОЖНЫХ РЕШЕНИЙ И ДР. ПОЛУЧЕННОЙ ИНФОРМАЦИИ И ПРИНЯТИЕ СООТВЕТСТВУЮЩИХ МЕР</u>**

Например: *«Решений слишком много (мощность $\tilde{\tilde{\Xi}}$ слишком велика). Задача численно неразрешима $\Rightarrow$ Необходимо провести более точные измерения, дающие интервалы значений меньшего радиуса, и задача станет численно разрешимой.»*

АНАЛИЗ РЕШЕНИЙ

$\dot{O}pt$, $\dot{G}r$ — решения, полученные для средних значений весов:

$$\boldsymbol{w}_i \to w_i = \frac{\underline{\boldsymbol{w}}_i + \overline{\boldsymbol{w}}_i}{2}.$$

$\dot{O}pt \in \Xi$.

- $\mathrm{P}(\dot{O}pt) = 0.3$, $\exists Opt \in \Xi$: $\mathrm{P}(Opt) = 0.5$;
- $f(\dot{O}pt, w) = 426$;

$$\bigcup \{\boldsymbol{f}(Opt) \mid Opt \in \Xi\} = [401, 427].$$

$\dot{G}r \in \tilde{\Xi}$.

- $\mathrm{P}(\dot{G}r) = 0.16$, $\exists Gr \in \tilde{\Xi}$: $\mathrm{P}(Gr) = 0.48$;
- $f(\dot{G}r, w) = 417$;

$$\bigcup \{\boldsymbol{f}(Gr) \mid Gr \in \tilde{\Xi}\} = [292, 296] \cup [403, 408] \cup [417, 426].$$

СОДЕРЖАНИЕ ДОКЛАДА:

- Постановка задачи дискретной оптимизации
- Постановка задачи дискретной оптимизации с интервальной целевой функцией
- Подходы к работе с неопределённостями
- Подходы к решению задач дискретной оптимизации с интервальной целевой функцией
- Варианты определения решений задачи

СОДЕРЖАНИЕ ДОКЛАДА:

- Задача о покрытии с интервальными весами
  и её приближённое решение
- Точность получаемых решений
- Интервальный жадный алгоритм
- Вычислительная сложность
- Результаты, получаемые при применении алгоритма
- Анализ. Непредставительность точечных решений