Подходы к решению задач дискретной оптимизации с интервальной целевой функцией

А.В. Пролубников
Омский государственный университет
e-mail: a.v.prolubnikov@mail.ru

В работе даётся обзор подходов к решению задач дискретной оптимизации с интервальной целевой функцией. Эти подходы рассматриваются в общем контексте исследований оптимизационных задач с неопределённостями в постановках. Рассматриваются варианты концепций оптимальности решений для задач дискретной оптимизации с интервальной целевой функцией — робастные решения, множества решений оптимальных по Парето, слабые и сильные оптимальные решения, объединённые множества решений и др. Оценивается предпочтительность выбора той или иной концепции оптимальности при решении задач и отмечаются ограничения для применения использующих их подходов.

Ключевые слова: дискретная оптимизация, интервальная неопределённость.

Введение

Оптимизационные задачи с неточно заданными входными данными, в частности, задачи с неточно заданными параметрами целевых функций и ограничений, задающих допустимое множество решений задачи, иследовались в различных направлениях. Одним из естественных и часто единственно возможным способом представления неопределённости значения неточно заданного параметра является использование интервала его возможных значений, как это делается в рассматриваемых нами далее подходах.

Наша цель, в соответствии с которой были отобраны обозреваемые работы, дать представление о месте, которое занимают исследования задач дискретной оптмизации с интервальной целевой функцией в контексте исследований оптимизационных задач с интервальными неопределённостями во входных данных; дать представление об интервальных подходах, как подходах оперирующих интервальными величинами и нацеленных на получение оптимальных решений в соответствии с некоторой концепцией оптимальности. Под *концепцией оптимальности* нами понимается определение того, что считать оптимальным решением для некоторой постановки задачи дискретной оптимизации с интервальной целевой функцией. Примерами концепций оптимальности являются рассматриваемые нами концепции робастных решений, множеств решений оптимальных по Парето, сильных и слабых оптимальных и приближённых решений, объединённых множеств оптимальных и приближённых решений.

Мы рассматриваем задачи дискретной оптимизации, которые в общем случае формулируются следующим образом.

Постановка задачи дискретной оптимизации (I). *Задача дискретной оптимизации («задача ДО»)* — это задача, в которой задано дискретное *множество допустимых* *решений* $\mathcal{D}$ и *целевая функция* $f: \mathcal{D} \to \mathbb{R}_+$, $\mathbb{R}_+ = \{a \in \mathbb{R} \mid a > 0\}$. Требуется найти такое $\check{x} \in \mathcal{D}$, что

$$f(\check{x}) = \min_{x \in \mathcal{D}} f(x), \qquad (1)$$

либо такое $\hat{x} \in \mathcal{D}$, что

$$f(\hat{x}) = \max_{x \in \mathcal{D}} f(x). \qquad (2)$$

Оптимальное решение задачи ДО (I) — это пара $(\check{x}, f(\check{x}))$ для задачи минимизации (1) и пара $(\hat{x}, f(\hat{x}))$ для задачи максимизации (2).

Далее, если это отдельно не оговаривается, нами рассматриваются задачи ДО с критерием (1).

Как задачи ДО могут быть поставлены многие прикладные задачи: задачи управления запасами, задачи размещения, задачи календарного планирования и многие другие. Для решения задач ДО развит математический аппарат, позволяющий разрабатывать точные и приближённые алгоритмы их решения; оценивать их вычислительную сложность, вычислительную сложность нахождения приближённых решений с гарантированной точностью; получены результаты о неприближаемости оптимальных решений для некоторых задач ДО и т.д. При этом, как правило, предполагается, что входные данные для индивидуальных задач ДО заданы точно. В частности, предполагается, что точно заданы параметры целевой функции $f(x)$. В большинстве случаев далее мы будем рассматривать задачи ДО с линейными целевыми функциями вида

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} w_i x_i, \qquad (3)$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{D}$, $w = (w_1, \ldots, w_n)$, $w_i > 0$. Эффективные методы решения задач ДО разработаны и для некоторых видов нелинейных целевых функций. При принятии гипотезы $\mathrm{P} \neq \mathrm{NP}$ рассматриваемые нами задачи ДО могут как принадлежать классу P, так и быть NP-трудными [1].

Применение математического аппарата методов оптимизации для решения прикладных задач зачастую затруднено неполнотой информации об их параметрах, что приводит к неточно заданным значениям коэффициентов целевой функции и коэффициентов уравнений и неравенств, задающих $\mathcal{D}$. Входные данные таких задач не всегда могут быть получены с точностью достаточной для того, чтобы игнорировать неопределённости в их значениях и применять методы решения задач ДО с точными входными данными. Использование усреднённых по результатам измерений данных также не всегда оказывается оправданным прежде всего по причине возможной «непредставительности» получаемого для них решения: для различных возможных значений входных данных оптимальные или приближённые решения могут отличаться друг от друга как по значениям компонент векторов, являющихся аргументами оптимума, так и по значениям оптимума. Причём дискретность множества $\mathcal{D}$ обеспечивает возможность того, что эти отличия будут существенны.

Неопределённость входных данных задачи ДО и, в частности, неопределённость параметров целевой функции обуславливается различными причинами. Она может быть вызвана, например, тем, что измерения значений этих параметров произведены с некоторой неустранимой погрешностью. При этом вероятностное распределение величины ошибки для большинства измерительных устройств не является нормальным, и достаточного объёма информации для выбора распределения и его параметров может не быть [2, 3]. Неопределённость в значениях входных данных может присутствовать и по причине неполноты информации на момент начала исследований и возможности её изменений с течением времени.

Приведём примеры возникновения неопределённостей во входных данных задач ДО. Так, в задаче нахождения кратчайшего пути в дорожной сети, в задаче построения транспортной сети от источников к стокам и в других прикладных задачах, которые ставятся как задачи ДО на графах, веса рёбер графа могут быть заданы неточно. Если веса рёбер отражают стоимость транспортировки какого-либо ресурса или переезда между пунктами, на значения весов влияет множество факторов, количественные выражения которых не всегда могут быть определены точно. В частности, для одного и того же маршрута расход топлива, потребляемого транспортом, может зависеть от погодных условий, от качества и типа используемого топлива. Стоимость транспортировки или переезда может недетерминированно увеличиваться в случаях заторов и аварий.

При составлении набора рейсов для железнодорожной сети с минимизацией стоимости их обслуживания могут присутствовать неустранимые неопределённости при оценивании заработной платы персонала, вызванные, например, переменными значениями надбавок к окладу. На момент составления набора рейсов значения этих параметров точно неизвестны. В прикладной задаче нахождения оптимального севооборота, которая может быть сведена к нахождению гамильтонова цикла в графе с интервальными весами рёбер [4], для того, чтобы наиболее эффективно использовать земельные ресурсы, мы должны знать характеристики будущих урожаев, которые не могут быть точно установлены заранее, а допускают лишь интервальное представление их возможных значений. Другие примеры прикладных задач, которые ставятся как задачи с интервальными неопределённостями во входных данных, представлены в [5].

Неопределённость во входных данных рассмотренных прикладных задач может быть смоделирована целевой функцией с интервальными коэффициентами. Различным сочетаниям значений коэффициентов соответствуют различные решения получаемых для них индивидуальных задач ДО. Для выбора какого-либо решения из $\mathcal{D}$ или какой-либо совокупности таких решений как оптимального решения задачи ДО с интервальными неопределённостями во входных данных необходимо провести анализ некоторого множества решений задач ДО с неинтервальными целевыми функциями. Как правило, мощность этого множества велика.

Нами будут рассмотрены подходы к решению задач ДО с интервальной целевой функцией, преследующие цель получить информацию об оптимальных или приближённых решениях индивидуальных задач ДО, которые соответствуют возможным значениям неточно заданных параметров. Эта информация должна быть использована для оценки возможных альтернатив и служить основанием принятия решения, то есть выбора какого-то одного решения из множества допустимых и оценки возможных потерь (или возможной полученной выгоды) при этом выборе.

1. Задачи ДО с интервальными неопределённостями коэффициентов целевой функции

1.1. Представление неопределённости значения числового параметра интервалом

Часто единственной достоверной информацией относительно неопределёного параметра является то, что значение этого параметра принадлежит некоторому интервалу на числовой оси. Интервальные значения будем далее обозначать жирным шрифтом:

$$\boldsymbol{a}=[\underline{\boldsymbol{a}},\overline{\boldsymbol{a}}] = \{a \in \mathbb{R} \mid \underline{\boldsymbol{a}} \leq a \leq \overline{\boldsymbol{a}}\},$$

где $\underline{\boldsymbol{a}}$ обозначает нижнюю границу интервала, $\overline{\boldsymbol{a}}$ — верхнюю, $\underline{\boldsymbol{a}} \leq \overline{\boldsymbol{a}}$. Будем говорить, что интервал $\boldsymbol{a}$ *вырожден*, если $\underline{\boldsymbol{a}} = \overline{\boldsymbol{a}}$. В противном случае будем называть интервал *невырожденным*. Как $\mathbb{IR}$ будем обозначать заданное таким образом на $\mathbb{R}$ множество интервалов. Для всех рассматриваемых нами далее интервалов $\boldsymbol{a} \in \mathbb{IR}$ выполняется условие $\underline{\boldsymbol{a}} > 0$. Множество таких интервалов будет обозначаться нами как $\mathbb{IR}_+$.

Суммой интервалов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ является интервал $[\underline{\boldsymbol{a}} + \underline{\boldsymbol{b}}, \overline{\boldsymbol{a}} + \overline{\boldsymbol{b}}]$. Результатом умножения интервала $\boldsymbol{a}$ на $\alpha > 0$ является интервал $\alpha\boldsymbol{a} = [\alpha\underline{\boldsymbol{a}}, \alpha\overline{\boldsymbol{a}}]$. Произведение интервалов $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{IR}_+$ — это интервал $[\underline{\boldsymbol{a}}\,\underline{\boldsymbol{b}}, \overline{\boldsymbol{a}}\,\overline{\boldsymbol{b}}]$.

Интервальный вектор $\boldsymbol{a}$ имеет своими компонентами интервалы $\boldsymbol{a}_i \in \mathbb{IR}$:

$$\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n) = ([\underline{\boldsymbol{a}}_1, \overline{\boldsymbol{a}}_1], \ldots, [\underline{\boldsymbol{a}}_n, \overline{\boldsymbol{a}}_n]).$$

Будем обозначать множество таких n-мерных интервальных векторов как $\mathbb{IR}^n$.

1.2. Отношение порядка на множестве интервалов

Для того, чтобы задать концепцию оптимальности решения задачи ДО с интервальной целевой функцией, необходимо задать отношение порядка на множестве допустимых решений, которое вводится исходя из значений целевой функции для них. Пользуясь этим отношенем порядка, лицо, принимающее решение в ситуации неопределённости, отдаёт предпочтение тому или иному допустимому решению.

Возможные способы задания отношения порядка на $\mathbb{IR}$ определены стандартом 1788 IEEE [6]. Одной из первых работ, в которых вводились возможные способы определения отношения порядка на множестве интервалов и повлиявших на выбор отношений порядка, закреплённых в этом стандарте, была статья [7]. Интервалы и отношения порядка на множестве интервалов используются в этой работе для накопления и упорядочения информации о временных («темпоральных») интервалах. В работе вводится 13 возможных отношений порядка, в которых могут находиться временные интервалы. Эти отношения порядка вошли в стандарт 1788 IEEE. Однако специфика, присущая временным интервалам, например, использование таких наименований отношений частичного порядка как «встречает», «начинает», «заканчивает», «до», «после» может вызывать сложности при работе с этими отношениями в предметных областях, не связанных с временем, затруднять понимание формулировок и рассуждений.

Рассмотрим базовые отношения порядка на $\mathbb{IR}$ из стандарта 1788 IEEE. Будем говорить, что неравенство $\boldsymbol{a} \leq \boldsymbol{b}$ выполняется

а) *в слабом смысле*, если $\exists a \in \boldsymbol{a}\ \exists b \in \boldsymbol{b}$ такие, что $a \leq b$, что эквивалентно $\underline{\boldsymbol{a}} \leq \overline{\boldsymbol{b}}$;

б) *в сильном смысле*, если $\forall a \in \boldsymbol{a}\ \forall b \in \boldsymbol{b}$ имеем $a \le b$, что эквивалентно выполнению неравенства $\overline{\boldsymbol{a}} \le \underline{\boldsymbol{b}}$ для концов интервалов;
в) *в EA-смысле*, если $\exists a \in \boldsymbol{a}$ такие, что $\forall b \in \boldsymbol{b}$ имеем $a \le b$, что эквивалентно $\underline{\boldsymbol{a}} \le \underline{\boldsymbol{b}}$;
г) *в AE-смысле*, если $\forall a \in \boldsymbol{a}\ \exists b \in \boldsymbol{b}$ такие, что $a \le b$, что эквивалентно $\overline{\boldsymbol{a}} \le \overline{\boldsymbol{b}}$;
д) *в центральном смысле*, если $(\overline{\boldsymbol{a}} + \underline{\boldsymbol{a}})/2 \le (\overline{\boldsymbol{b}} + \underline{\boldsymbol{b}})/2$, то есть если середина (центр) интервала $\boldsymbol{a}$ меньше середины интервала $\boldsymbol{b}$.

Сильное отношение частичного порядка, задаваемое с помощью неравенства интервалов в сильном смысле, позволяет сравнивать непересекающиеся интервалы, а также интервалы, пересекающиеся в одной точке. Пересекающиеся более чем в одной точке интервалы при использовании сильного отношения частичного порядка считаются несравнимыми. Задаваемое с помощью неравенства интервалов в слабом смысле слабое отношение частичного порядка допускает пересечение интервалов более чем в одной точке. Неравенство двух интервалов в слабом смысле является частным случаем неравенства интервалов в EA-смысле. Неравенство двух интервалов в сильном смысле является частным случаем неравенства интервалов в AE-смысле. Сравнение двух интервалов в центральном смысле может пониматься как сравнение наиболее вероятных значений неточно заданного параметра при заданном равномерном вероятностном распределении его значений. В случае, если задано вероятностное распределение отличное от равномерного, для сравнения интервалов используются средние значения, определяемые этим распределением.

В рассматриваемых нами далее задачах ДО интервальная целевая функция имеет вид

$$\boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{w}) = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{w}_i x_i, \tag{4}$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{D}$, $\boldsymbol{w} = (\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_n) \in \mathbb{IR}^n_+$. Интервал $\boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{w})$ для задачи на минимум интерпретируется как интервал значений возможных потерь при выборе допустимого решения x. Поскольку выражение (4) содержит по одному вхождению каждой переменной в первой степени, то по основной теореме интервальной арифметики [8] для функции (4) имеем

$$\boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{w}) = \{ f(x, w) \mid w \in \boldsymbol{w} \} = [f(x, \underline{\boldsymbol{w}}), f(x, \overline{\boldsymbol{w}})].$$

Введение порядка на множестве интервалов значений целевых функций вида (4) для решений из $\mathcal{D}$ позволяет, в частности, задать два определения множества решений оптимальных по Парето — одной из базовых концепций оптимальности для методов решения многокритериальных оптимизационных задач. Далее нами будут рассмотрены примеры сведения задач ДО с интервальной целевой функцией к задачам многокритериальной оптимизации.

Говорят, что допустимое решение x *лучше*, чем допустимое решение y (обозначается как «$x \preceq y$»), если $f(x, \underline{\boldsymbol{w}}) \le f(y, \underline{\boldsymbol{w}})$, $f(x, \overline{\boldsymbol{w}}) \le f(y, \overline{\boldsymbol{w}})$ и одно из этих неравенств выполнено строго. Допустимые решения x и y *эквивалентны*, если $\boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{w}) = \boldsymbol{f}(y, \boldsymbol{w})$. Иначе x и y считаются несравнимыми. Если $x \preceq y$, то y может быть исключено из рассмотрения при решении задачи ДО с целевой функцией (4) в том случае, если наличие $w \in \boldsymbol{w}$ таких, что $f(y, w) < f(x, w)$, может быть проигнорировано при решении прикладной задачи.

Допустимое решение x *строго лучше*, чем допустимое решение y (обозначается как «$x \prec y$»), если $f(x, \overline{\boldsymbol{w}}) \le f(y, \underline{\boldsymbol{w}})$, то есть если неравенство $\boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{w}) \le \boldsymbol{f}(y, \boldsymbol{w})$ выполнено в сильном смысле. Если $x \prec y$, то y не может быть оптимальным ни для какой концепции оптимальности.

Множество Парето содержит несравнимые друг с другом оптимальные по Парето решения. Допустимое решение x называется *оптимальным по Парето*, если нет таких $y \in \mathcal{D}$, что $y \preceq x$. Совокупность всех оптимальных по Парето решений $\mathcal{P}_{\preceq}$ называется *множеством Парето* (или *«эффективным множеством Парето»*). Множество $\mathcal{P}_{\prec}$ решений оптимальных по Парето для отношения порядка «строго лучше» задаётся аналогично с использованием сильного отношения частичного порядка на интервалах значений целевых функций.

Сценарием для задачи ДО с интервальной целевой функцией (4) называется вектор значений коэффициентов $w = (w_1, \ldots, w_n) \in \boldsymbol{w}$. С помощью $\boldsymbol{w}$ здесь и далее будем обозначать *множество сценариев*, заданных для задачи ДО с целевой функцией (4). $\boldsymbol{w} \in \mathbb{IR}^n_+$, либо $\boldsymbol{w}$ может быть дискретным, что соответствует некоторому количеству явно указанных сценариев. Для $x \in \mathcal{D}$ при сценарии $w = (w_1, \ldots, w_n) \in \boldsymbol{w}$ определено значение целевой функции $f(x, w)$.

Рассмотрим возможные прикладные трактовки способов задания отношения порядка на $\mathbb{IR}$ с помощью интервальных неравенств типов а)–д) при решении задачи ДО с интервальной целевой функцией.

а) $\boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{w}) \le \boldsymbol{f}(y, \boldsymbol{w})$ в слабом смысле эквивалентно существованию таких сценариев из $\boldsymbol{w}$, для которых потери при выборе x не превышают максимальных потерь при выборе y;
б) $\boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{w}) \le \boldsymbol{f}(y, \boldsymbol{w})$ в сильном смысле эквивалентно тому, что при любом сценарии из $\boldsymbol{w}$ потери при выборе x не превышают потерь при выборе y;
в) $\boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{w}) \le \boldsymbol{f}(y, \boldsymbol{w})$ в EA-смысле эквивалентно существованию таких сценариев из $\boldsymbol{w}$, для которых минимальные потери при выборе x не превышают минимальных потерь при выборе y;
г) $\boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{w}) \le \boldsymbol{f}(y, \boldsymbol{w})$ в AE-смысле эквивалентно тому, что при любом сценарии из $\boldsymbol{w}$ потери при выборе x не превышают максимальных потерь при выборе y;
д) $\boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{w}) \le \boldsymbol{f}(y, \boldsymbol{w})$ в центральном смысле эквивалентно тому, что среднее для всех сценариев из $\boldsymbol{w}$ значение потерь при выборе x не превышает средних потерь при выборе y.

Таким образом, с каждым из приведённых способов задания частичного порядка на $\mathbb{IR}$ может быть связана содержательная постановка задачи ДО с интервальной целевой функцией.

Возможные определения отношения частичного порядка на $\mathbb{IR}$ и связанные с ними интерпретации, прежде всего, вероятностные, а также количественные оценки неравенства интервалов были представлены в [9, 10, 11, 12, 13]. В [14] вводится отношение линейного порядка на $\mathbb{IR}$, с помощью которого авторы обобщают классические результаты теории матричных игр на случай интервальной платёжной матрицы. Отношение порядка строится исходя из анализа возможных предпочтений рационального игрока. Для того, чтобы были сравнимы вложенные интервалы $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}$ ($\boldsymbol{x} \subset \boldsymbol{y}$), чёткое отношение порядка $\le$, для которого неравенство $\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{y}$ либо верно, либо нет, дополняется нечётким отношением порядка. Для вложенных интервалов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ истинность неравенства $\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{y}$ выражается значением от 0 до 1.

Выбор отношения порядка на $\mathbb{IR}$ должен адекватно отражать специфику решаемой прикладной задачи. Для любого из представленных выше отношений порядка могут быть подобраны ситуации, для которых его использование будет неприемлемым. Так, например, отношение частичного порядка, задаваемое с помощью неравенства интервалов в AE-смысле, пригодно при поиске пути между двумя вершинами в графе, длина которого была бы не больше длины любого другого пути в наихудших для этих путей случаях. Тогда как это отношение порядка не может быть использовано для сравнения допустимых решений при поиске набора путей, каждый из которых является оптимальным в наилучшем для него случае. Меньший в слабом смысле интервал может почти целиком располагаться на числовой оси правее большего, что слабо коррелирует с интуитивными ожиданиями и может быть неприемлемо при решении некоторых прикладных задач. Отношение частичного порядка в центральном смысле обладает очевидным недостатком, состоящим в том, что одинаковыми оказываются все интервалы с одинаковым центром.

1.3. Задачи ДО с интервальной целевой функцией

В дальнейшем нами рассматриваются интервальные постановки для задач ДО, которые могут быть сформулированы следующим образом. Пусть $E = \{e_1, \ldots, e_n\}$. Значение $w_i = w(e_i)$ — это *вес* элемента $e_i \in E$, $w(e) > 0$ для всех $e \in E$. Определим двоичный вектор $x = (x_1, \ldots, x_n)$, который задаёт множество $E_x \subset E$: $x_i = 1$, если $e_i \in E_x$, и $x_i = 0$, если $e_i \in E \setminus E_x$. Задано множество допустимых решений $\mathcal{D}$, которое может быть рассмотрено как множество двоичных векторов, ассоциированных с подграфами заданного вида — с множеством путей, соединяющих вершины в графе, с множеством остовных деревьев, с множеством гамильтоновых циклов, с паросочетаниями, разрезами и т.д.

Постановка задачи ДО (II). Необходимо найти $x^* \in \mathcal{D}$, дающий минимум значения целевой функции

$$f(x, w) = \sum_{e \in E_x} w(e). \tag{5}$$

Постановка задачи ДО (II) включает в себя постановки многих известных задач ДО на графах и гиперграфах. А именно, множество E может представлять собой множество рёбер графа $G = \langle V, E \rangle$, тогда как множество $\mathcal{D}$ включает в себя некоторые подграфы графа G. Таким образом могут быть сформулированы следующие задачи:

- задача о кратчайшем пути в графе,
- задача о самом длинном пути в ориентированом графе,
- задача об остовном дереве минимального веса,
- задача о вершинном и рёберном покрытиях графа,
- задача коммивояжёра (задача о гамильтоновом цикле минимального веса),
- задача о паросочетаниях,
- задача о минимальном разрезе

и др. Точные формулировки задач ДО, для которых в этой работе рассматриваются соответствующие задачи ИДО, могут быть найдены, например, в [1].

Задачи ДО, которые могут быть сформулированы в постановке (II) и к которым могут применяться рассматриваемые далее подходы, не ограничиваются задачами на графах или гиперграфах. Например, в постановке (II) может быть сформулирована задача о булевом рюкзаке.

Постановка задачи ДО с интервальной целевой функцией. *Задача ДО с интервальной целевой функцией («задача ИДО»)* — это задача, получаемая из задачи

ДО (II) заменой целевой функции $f(x, w)$ вида (5) на интервальную целевую функцию $\boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{w})$ вида (4). Для того, чтобы решить задачу ИДО, необходимо найти решение или некоторое множество решений из $\mathcal{D}$, которое являлось бы оптимальным в соответствии с выбранной концепцией оптимальности.

2. Подходы к решению задач ИДО

Наиболее широко применяемыми и развитыми подходами к решению задач ДО с неопределённостью во входных данных и, в частности, задач ИДО являются *стохастическая оптимизация* и *робастная оптимизация*.

При применении методов стохастической оптимизации предполагается, что на множестве сценариев $\boldsymbol{w}$ задано вероятностное распределение, исходя из которого, как правило, ищется такое решение, которое давало бы наилучшее значение целевой функции в среднем. Естественным препятствием для применения методов стохастической оптимизации может быть отсутствие достоверной информации о распределении на $\boldsymbol{w}$, то есть отсутствие достаточного количества статистических данных, обосновывающих выбор распределения.

По разным причинам, в частности, по причинам экономического характера, не всегда возможно определить вид распределения и его параметры. Получение достаточной по мощности выборки, исходя из которой определяется тип распределения и его параметры, может оказаться слишком дорогостоящим или даже принципиально неосуществимым. Кроме того, предположение о независимости испытаний при получении выборки не всегда оправдано, тогда как имеющая место корреляция значений различных входных параметров может быть трудноопределимой. В ситуациях, когда нет статистической устойчивости при проведении эксперимента, теоретико-вероятностные конструкции напрямую применять к решению прикладной задачи нельзя, и математическая статистика, основанная на теории вероятностей, не может служить подходящим инструментом для обработки данных.

Однако наиболее существенным недостатком стохастической оптимизации является то, что, как правило, её методы нацелены на оптимизацию средних значений целевой функции, тогда как лицо, принимающее решения, зачастую заинтересовано в оценивании рисков, которые реализуются в наихудшем случае при допустимых значениях неопределённых параметров. Это является принципиальным, если решение принимается только один раз.

Другим широко распространённым подходом к решению задач ИДО является робастная оптимизация (см., к примеру, [15, 16]). Под робастным решением понимается либо такое решение из $\mathcal{D}$, которое для задачи ДО на минимум минимизирует максимальное значение целевой функции для всех возможных сценариев, либо такое, которое минимизирует для всех возможных сценариев отклонение значения целевой функции задачи ДО от её оптимального значения на $\mathcal{D}$ при тех же сценарях. Формальная постановка задач робастной оптимизации даётся ниже. В содержательном смысле робастное решение задачи ИДО — это наиболее устойчивое к изменению неточно заданных коэффициентов целевой функции допустимое решение. При применении робастной оптимизации может быть использована информация о вероятностном распределении на интервалах коэффициентов [16, 17]. Далее нами будет произведён краткий обзор методов робастной оптимизации, как подхода альтернативного интервальным методам решения задач ИДО, рассмотрение которых является главной целью этой работы.

Значительное внимание было уделено задачам линейного программирования (далее — *«задачи ЛП»*) с интервальной целевой функцией и интервальными ограничениями, задающими множество допустимых решений задачи [18, 19, 20, 21, 22, 23, 24]. Вопросы, связанные с решением задач целочисленного линейного программирования (далее — *«задачи ЦЛП»*) с интервальной целевой функцией, рассматривались в [25]. В [26, 27, 28, 29, 30] и других работах тех же авторов предложен подход к решению задач ЦЛП с интервально заданными коэффициентами целевой функции и ограничениями. В этих работах рассматриваются задачи ДО с параметрами, которые принадлежат выпуклым многогранникам, каковыми являются, в частности, и элементы $\mathbb{IR}^n$. Параметры при этом делятся на две категории: *контролируемые* параметры, то есть те, значения которых могут быть выбраны из множеств их возможных значений, и *неконтролируемые*, то есть принимающие произвольные значения из множеств возможных значений. Подход, представленный в этих работах, близок к робастной оптимизации. В частности, задачи с критерием робастной оптимизации рассматриваются в [25, 26]. Вообще говоря, задача, которая ставится в этих работах, может быть сформулирована следующим образом: необходимо найти такие значения неточно заданных параметров задачи ЦЛП, при которых будет достигнут максимум значения целевой функции. В качестве решения представляется целочисленный вектор аргумента и значение целевой функции для него.

Предложены и другие подходы к постановке и решению задач ДО с интервальными неопределённостями во входных данных. Так, например, в [31] предложен подход к решению задачи о покрытии множества как задачи ЦЛП, где правая часть ограничений представляет собой случайный двоичный вектор, то есть заданы вероятности, с которыми должны быть покрыты элементы покрываемого множества. В [32] для той же задачи неопределёнными считаются элементы матрицы ограничений, то есть не определена принадлежность элементов покрываемого множества заданным подмножествам этого множества, из которых необходимо построить покрытие. Для решения оптимизационных задач с неопределённостями во входных данных используется также математический аппарат нечётких множеств. Например, в [34, 35] задача о покрытии множества с интервальными неопределённостями во входных данных ставится и решается как задача о покрытии для нечётких множеств.

Интервальный анализ — это математическая дисциплина, возникшая во второй половине XX-го века и вскоре ставшая важным практически востребованным инструментом для решения прикладных задач. Одним из направлений развития интервального анализа в 1980-е годы становится решение оптимизационных задач с интервальными неопределённостями во входных данных. Отдельное направление в нём составили работы, посвященные решению задач ИДО на графах и гиперграфах (работы [36, 37, 38, 39, 40] и др.).

Интервальные подходы к решению задач ИДО не нацелены на получение одного или, возможно, нескольких частных альтернативных решений для задач ДО в результате рассмотрения граничных, средних или каких-либо других отдельно взятых значений коэффициентов целевой функции. Исключая ситуации, когда существует единственное оптимальное решение для всех возможных значений неточно заданных коэффициентов, интервальные подходы могут быть охарактеризованы как нацеленные на получение некоторой совокупности решений — множества оптимальных в соответствии с выбранной концепцией оптимальности решений задачи ИДО для значений коэффициентов, принадлежащих заданным интервалам. Примерами таких совокупностей решений могут служить множество решений оптимальных по Парето, полное множество альтернатив из этого множества, объединённое множество решений.

Интервальные подходы допускают отсутствие информации о вероятностном распределении на интервалах коэффициентов целевой функции, хотя эта информация, в случае её наличия, и может быть учтена при использовании некоторых из них.

Для всех рассматриваемых нами подходов вычислительная сложность решения задачи ИДО не меньше, чем вычислительная сложность решения задачи ДО, для которой она поставлена, и может оказываться экспоненциальной как по времени, так и по памяти даже для полиномиально разрешимых задач ДО. За исключением отдельных классов полиномиально разрешимых задач ИДО интервальные подходы также дают экспоненциальные в общем случае алгоритмы решения задач ИДО.

3. Робастная оптимизация

Численно решая задачи ДО с неопределённостями во входных данных, можно ожидать, что если возможные отклонения неточно заданных значений от их точных значений будут невелики, то и получаемые решения будут мало отличаться от решений задач ДО с точно заданными входными данными. Однако в этом случае возникают следующие вопросы.

1). При каких наибольших изменениях неточно заданных параметров полученное для них решение задачи ДО остаётся оптимальным?
2). Какое из возможных оптимальных решений будет наиболее устойчиво, то есть будет оставаться оптимальным при наибольших изменениях значений параметров?
3). Как меняется оптимальное решение при малых изменениях неточно заданных параметров?

Поиск ответов на эти вопросы составляет суть робастной оптимизации — одного из наиболее развитых подходов к решению задач ИДО. Дадим краткий обзор результатов, полученных для этого подхода.

Формальные постановки задач робастной оптимизации для задач ДО на минимум следующие. Необходимо найти такое $\tilde{x} \in \mathcal{D}$, что

$$\max_{w \in \boldsymbol{w}} f(\tilde{x}, w) = \min_{x \in \mathcal{D}} \max_{w \in \boldsymbol{w}} f(x, w), \tag{6}$$

или такое $\tilde{x} \in \mathcal{D}$, что

$$\max_{w \in \boldsymbol{w}} \big(f(\tilde{x}, w) - f^*(w)\big) = \min_{x \in \mathcal{D}} \max_{w \in \boldsymbol{w}} \big(f(x, w) - f^*(w)\big), \tag{7}$$

где $f^*(w)$ — вес оптимального решения для сценария w. Решение задачи (6) называется *абсолютным робастным решением*, решение задачи (7) — *относительным робастным решением.*

Главным недостатком постановки задачи (6) является то, что при поиске абсолютного робастного решения учитываются только «плохие» сценарии, а информация, связанная со всеми остальными сценариями, игнорируется. Между тем, такие «плохие» сценарии могут составлять незначительную часть от всех сценариев из $\boldsymbol{w}$ и не отражать адекватно ситуацию в целом для всех сценариев.

В литературе по робастной оптимизации рассматриваются как множества сценариев $\boldsymbol{w} \in \mathbb{IR}^n$ с непрерывными интервалами $\boldsymbol{w}_i$ в качестве компонент, так и дискретные множества сценариев. Как правило, задачи робастной оптимизации (6) для полиномиально разрешимых задач ДО являются NP-трудными даже в случае наличия всего лишь двух возможных сценариев [41, 42, 43]. Это верно для задач о кратчайшем пути в графе, о минимальном остовном дереве, о минимальном разрезе в графе и др. Однако если количество сценариев является постоянным параметром задачи, а не частью входа, некоторые задачи робастной оптимизации в постановке (6) могут быть решены за псевдополиномиальное время, то есть за время полиномиальное относительно числовых параметров задачи.

Для случая, когда все веса являются невырожденными интервалами, задача (6) оказывается вычислительно менее сложной, чем та же задача, но с условием, что не более чем заданное количество k весов ($k < n$) являются невырожденными интервалами. В первом случае сложность нахождения робастного решения задачи (6) почти та же, что и для исходной задачи ДО [16]: если задача ДО разрешима за время $O(t(n))$ для некоторой заданной функции $t(n)$, то задача робастной оптимизации (6) разрешима для неё с вычислительной сложностью $O(n + t(n))$. В случае же интервальности только части весов задача (6), необходимо решить $n + 1$ детерминированных (то есть без неопределённостей в постановке) задач ДО, что даёт вычислительную сложность $O(n \cdot t(n))$ [16].

Под *α-приближённым решением* задачи ДО на минимум понимается приближённое решение задачи, которое не более чем в α раз больше значения целевой функции для оптимального решения задачи. В [44] показано, что наличие алгоритма, дающего α-приближённое решение задачи ДО (II), обеспечивает существование приближённого алгоритма решения задачи (6) с той же точностью приближения.

Задачи робастной оптимизации вида (7) также могут быть NP-трудными и даже сильно NP-трудными в случае, если исходные задачи ДО полиномиально разрешимы. Это имеет место в случае двух возможных сценариев для задач о кратчайшем пути в графе, об остовном дереве минимального веса, для задачи о минимальном разрезе, для задачи о назначениях [41, 42, 43].

В отличие от поиска решения задачи (6) нахождение относительного робастного решения подразумевает рассмотрение не только «плохих» сценариев. Но, в свою очередь, критерий задачи (7) не удовлетворяет так называемому «условию независимости несвязанных альтернатив» [45]: добавление неоптимального относительно критерия (7) решения в $\mathcal{D}$ может привести к тому, что оптимальное решение задачи станет неоптимальным, и наоборот. При этом, поскольку (7) содержит значение оптимума $f^*(w)$ для сценариев $w \in \boldsymbol{w}$, то робастная оптимизация в соответствии с (7) NP-трудна для NP-трудных задач ДО.

4. Интервальные подходы к решению задач ИДО

4.1. Решение задачи ИДО сведением её к многокритериальной задаче ДО

Задачи ИДО могут быть рассмотрены как задачи многокритериальной оптимизации, поскольку интервальные веса неявно задают некоторое множество целевых функций задачи ДО для отдельных сценариев из $\boldsymbol{w}$. Для некоторых постановок задач ИДО показано, что решение для них может быть получено решением задач двухкритериальной оптимизации, коэффициенты целевых функций которых принимают максимальные и минимальные значения из заданных интервалов. Другие подходы к решению задач ИДО, использующие сведение к задачам многокритериальной оптимизации, нацелены на нахождение таких решений задач ДО, которые были бы оптимальными для большинства сценариев.

В [36, 37, 46, 47, 48] исследуются задачи ИДО получаемые из задач ДО вида (II) заменой целевой функции (5) на целевую функцию

$$\boldsymbol{f}(x,\boldsymbol{w}) = \sum_{e\in E_x} \boldsymbol{w}(e) = [f(x,\underline{\boldsymbol{w}}), f(x,\overline{\boldsymbol{w}})], \tag{8}$$

где E_x — множество рёбер графа,

$$f(x,\underline{\boldsymbol{w}}) = \sum_{e\in E_x} \underline{\boldsymbol{w}}(e),\ \ f(x,\overline{\boldsymbol{w}}) = \sum_{e\in E_x} \overline{\boldsymbol{w}}(e).$$

Рассматриваются задачи ИДО о совершенном паросочетании, об остовном дереве минимального веса, ИДО для задачи коммивояжёра, для задачи о покрытии графа его подграфами типа «звезда» одинаковой степени. Производится сведение задачи ИДО с целевой функцией (8) к задаче двухкритериальной оптимизации, решение которой ищется в виде множества $\mathcal{P}_{\preceq}$ решений оптимальных по Парето.

Множество Парето $\mathcal{P}_{\preceq}$ может обладать большой мощностью для задачи ИДО, что приводит к большой вычислительной сложности нахождения всех его элементов. Вместо $\mathcal{P}_{\preceq}$ может быть представлено *полное множество альтернатив* — такое множество решений оптимальных по Парето, которое содержит по одному представителю от всех классов эквивалентности в соответствии с заданным отношением порядка [37].

В [46] доказано, что нахождение множества Парето для задачи ИДО с интервальной целевой функцией (8), заданной на рёбрах графа, сводится к нахождению этого множества для двухкритериальной задачи ДО с векторной целевой функцией вида

$$(f_1, f_2) = (f(x,\underline{\boldsymbol{w}}), f(x,\overline{\boldsymbol{w}})). \tag{9}$$

К критериям (9) может быть добавлен также критерий

$$\max_{e\in E_x} d(\boldsymbol{w}(e)) \to \min,$$

где $d(\boldsymbol{w}(e)) = \overline{\boldsymbol{w}}(e) - \underline{\boldsymbol{w}}(e)$ — *ширина* интервала. Согласно этому критерию минимизируется максимальный разброс возможных значений весов рёбер графа, соответствующих решению x задачи ИДО. Показано, что если максимальная мощность множества $\mathcal{D}$ не ограничена сверху полиномом от размерности задачи, то для произвольных интервалов весов $\boldsymbol{w}(e)$ нахождение множества $\mathcal{P}_{\preceq}$ для задачи ИДО на графе с n вершинами имеет экспоненциальную от размера входа вычислительную сложность.

Полиномиально разрешимые классы для таких задач ИДО могут быть получены модификацией интервальной целевой функции или введением дополнительных ограничений в набор ограничений, определяющий $\mathcal{D}$. Например, замена одного из критериев минимизации (максимизации) на максиминный (минимаксный) критерий обеспечивает для некоторых таких задач ограниченность мощности полного множества альтернатив полиномом от размерности задачи. Так, для задачи ИДО на минимум с целевой функцией (8) строится двухкритериальная задача ДО с критериями

$$f_1(x) = f(x, \overline{\boldsymbol{w}}) = \sum_{e \in E_x} \overline{\boldsymbol{w}}(e) \to \min,$$

$$f_2(x) = \max_{x \in \mathcal{D}} f(x, \underline{\boldsymbol{w}}) = \max_{x \in \mathcal{D}} \sum_{e \in E_x} \underline{\boldsymbol{w}}(e) \to \min .$$

Как было указано выше, широко исследовались задачи ЛП с интервальной целевой функцией. Поскольку к постановке задачи ЦЛП с интервальной целевой функцией добавляется только требование целочисленности, то возникает вопрос об адаптации для таких задач ИДО подходов, разработанных для задач ЛП с интервальной целевой функцией. Одним из таких подходов является использование линейной свёрточной функции.

Линейной свёрточной функцией (целевой функцией Гурвица) называется функция вида

$$f^{\lambda}(x, \boldsymbol{w}) = \lambda f(x, \underline{\boldsymbol{w}}) + (1-\lambda) f(x, \overline{\boldsymbol{w}}),$$

где $\lambda \in [0, 1]$. Поскольку $f(x, w)$ линейна по w, то имеем $f^{\lambda}(x, w) = f(x, w^{\lambda})$, где $w^{\lambda} = (w_1^{\lambda}, \ldots, w_n^{\lambda})$, $w_i^{\lambda} = \lambda \underline{\boldsymbol{w}}_i + (1-\lambda)\overline{\boldsymbol{w}}_i$.

В [49] рассматривается задача ИДО об остовных деревьях минимального веса с топологическим критерием, под которым может пониматься минимизация радиуса $r(x)$, максимизация диаметра $d(x)$ дерева, степени $D(x)$ дерева (максимальной степени вершины в дереве), количества $W(x)$ концевых вершин дерева и др. В [49] задача ИДО, в которой помимо интервального критерия присутствует топологический критерий, сводится к однокритериальной задаче ИДО. Задача ИДО с интервальным критерием

$$\boldsymbol{f}_1(x) = \sum_{e \in E_x} \boldsymbol{w}(e) \to \min$$

и неинтервальным критерием

$$f_2(x) \in \{r(x) \to \max, d(x) \to \max, D(x) \to \min, |W(x)| \to \min\}$$

решается как задача ИДО с критерием $\boldsymbol{f}_1(x)$, тогда как второй критерий заменяется ограничением вида $f_2(x) = k$, где k — фиксированное значение топологического параметра. Найденное таким образом решение объявляется оптимальным решением задачи ИДО, если оно является оптимальным по большинству сценариев для различных значений λ, веса рёбер для которых задаются как $w(e) = \lambda \underline{\boldsymbol{w}}(e) + (1-\lambda)\overline{\boldsymbol{w}}(e)$. Таким образом, ввиду линейности целевой функции, задача ИДО решается как задача оптимизации линейной свёрточной функции. Показано, что задача ИДО об остовных деревьях минимального веса с топологическими критериями указанного вида является NP-трудной.

В [50] показано, что нахождение множества Парето $\mathcal{P}_{\preceq}$ для задач ЛП с интервальной целевой функцией (4) может быть произведено с помощью линейной свёрточной функции, тогда как для решения задач ИДО такой подход, вообще говоря, не применим.

Говорят, что задача нахождения множества Парето $\mathcal{P}_{\preceq}$ для задачи ИДО *решается линейным свёрточным алгоритмом*, если для любого $x \in \mathcal{P}_{\preceq}$ существует $\lambda \in [0, 1]$ такое, что x является оптимумом соответствующей свёрточной функции:

$$(\forall x \in \mathcal{P}_{\preceq})(\exists \lambda \in [0, 1])\bigl(f^{\lambda}(x, \boldsymbol{w}) = \min_{y \in \mathcal{D}} f^{\lambda}(y, \boldsymbol{w})\bigr). \tag{10}$$

То есть любое оптимальное по Парето решение может быть получено как решение однокритериальной задачи ДО с целевой функцией-свёрткой. Если условие (10) не выполнено, то говорят, что задача ИДО *не решается линейным свёрточным алгоритмом.* В этом случае

$$(\exists x \in \mathcal{P}_{\preceq})(\forall \lambda \in [0,1])\big(f^{\lambda}(x,\boldsymbol{w}) > \min_{y\in\mathcal{D}} f^{\lambda}(y,\boldsymbol{w})\big),$$

то есть не все решения из $\mathcal{P}_{\preceq}$ могут быть получены в результате такого сведения.

В [50] доказывается, что решение задачи ДО

$$f^{\lambda}(x,\boldsymbol{w}) \to \min$$

для $\lambda \in (0,1)$ принадлежит множеству Парето $\mathcal{P}_{\preceq}$ этой задачи. Вместе с тем, показано, что решение задач ИДО на графах, в частности, задач ИДО об остовном дереве, о совершенном паросочетании и задачи коммивояжёра, не может быть сведено к решению одномерных оптимизационных задач для различных значений λ. Доказательство производится представлением частных случаев, не удовлетворяющих условию (10). Тем самым показано, что условие дискретности множества $\mathcal{D}$ не позволяет свести эти задачи ИДО к однокритериальным задачам ДО с критерием, являющимся свёрткой критериев (9).

В [36] рассматривается возможность применения линейного свёрточного алгоритма для решения задачи ИДО нахождения остовного дерева минимального веса. Показано, что с его помощью задача минимизации нижней границы интервальной целевой функции одновременно с минимизацией ширины интервала её значений может быть решена за время $O(n^4)$.

В [38] исследуется задача построения транспортной сети в условиях неточно заданных входных данных. Предложены подходы к постановке и решению такой задачи с представлением неопределённости с помощью нечётких множеств и интервалов. Задача ИДО ставится следующим образом. Дан граф $G = \langle V, E\rangle$, где V представляет множество пунктов источников и стоков, которые через промежуточные пункты связывает транспортная сеть, E — множество рёбер, соответствующих коммуникациям этой сети. Необходимо минимизировать стоимость построения транспортной сети, представляемой остовным деревом графа, и стоимость эксплуатации сети, определяемую распределением в ней потока. Целевая функция задачи следующая:

$$\boldsymbol{f}(T) = \sum_{(i,j)\in T} \big(\boldsymbol{w}(i,j) + \boldsymbol{v}(i,j)\boldsymbol{y}(i,j,T)\big), \tag{11}$$

$T \in \Omega$, где Ω — множество остовных деревьев графа G, $\boldsymbol{w}(i,j)$ — интервал возможных значений стоимости создания коммуникации между пунктами i и j, то есть интервальный вес ребра из E, $\boldsymbol{v}(i,j)$ — интервал возможных значений стоимости транспортировки единицы продукта по коммуникации, соответствующей ребру $(i,j) \in E$, $\boldsymbol{y}(i,j,T)$ — интервал возможных значений величины транспортного потока по этой коммуникации. Целевая функция (11) нелинейна.

Задача разбивается на две задачи: задачу построения транспортной сети с целевой функцией

$$\boldsymbol{f}_1(T) = \sum_{(i,j)\in T} \boldsymbol{w}(i,j)$$

и задачу распределения потока по ней с целевой функцией

$$\boldsymbol{f}_2(T) = \sum_{(i,j)\in T} \boldsymbol{v}(i,j)\boldsymbol{y}(i,j,T).$$

В качестве решения полученной двухкритериальной задачи ДО представляется множество $\tilde{\mathcal{P}}_{\preceq}$ приближённых решений задачи, то есть остовных деревьев из Ω, значения целевых функций для которых близки к значениям целевых функций для остовных деревьев из $\mathcal{P}_{\preceq}$. Декомпозиция исходной оптимизационной задачи на две задачи позволяет при нахождении приближённых решений получать задачи полиномиальной вычислительной сложности и, в результате, находить множество $\tilde{\mathcal{P}}_{\preceq}$ за полиномиальное время.

4.2. Слабые и сильные решения задачи ИДО

Понятия слабой и сильной оптимальности решений для интервальных задач ЛП было введено в [22] И. И. Ерёминым. В [22] рассматривается интервальная задача ЛП, в которой множество I интервально заданных параметров разбивается на два подмножества: *слабое* — множество I_1, содержащее контролируемые параметры, то есть те, значения которых можно задавать в пределах заданных интервалов, и *сильное* — множество I_2, содержащее неконтролируемые параметры, то есть те, которые могут принимать произвольные значения в пределах заданных интервалов.

Пусть n-кванторный вектор $\omega \in \{\exists, \forall\}^n$, определяемый разбиением I на подмножества I_1 и I_2, задаёт типы неопределённости для интервалов $\boldsymbol{w}_i$ коэффициентов целевой функции. Введём вспомогательные интервальные векторы $\boldsymbol{w}^{\exists} = (\boldsymbol{w}_i^{\exists})$, $\boldsymbol{w}^{\forall} = (\boldsymbol{w}_i^{\forall})$, имеющие те же размеры, что и вектор $\boldsymbol{w}$, и образованные элементами

$$\boldsymbol{w}_i^{\exists} = \begin{cases} \boldsymbol{w}_i, & \text{если } \omega_i = \exists, \\ 0, & \text{если } \omega_i = \forall, \end{cases} \quad \boldsymbol{w}_i^{\forall} = \begin{cases} \boldsymbol{w}_i, & \text{если } \omega_i = \forall, \\ 0, & \text{если } \omega_i = \exists. \end{cases}$$

Для случая интервальной целевой функции и детерминированно заданного множества допустимых решений $\mathcal{D}$ интервальная задача ЛП на максимум формулируется следующим образом. Найти $x^* \in \mathcal{D}$ такой, что

$$(\exists w' \in \boldsymbol{w}^{\exists})(\forall w'' \in \boldsymbol{w}^{\forall})(w = w' + w'')\big(f(x^*, w) = \max_{x\in\mathcal{D}} f(x, w)\big). \tag{12}$$

Смысл максимизации в этой модели может быть определён по-разному. В [22] ставится задача нахождения такого $\tilde{x} \in \mathcal{D}$, что

$$(\exists w' \in \boldsymbol{w}^{\exists})(\forall w'' \in \boldsymbol{w}^{\forall})(w = w' + w'')\left(f(\tilde{x}, w) = \min_{w'\in\boldsymbol{w}^{\exists}} \max_{w''\in\boldsymbol{w}^{\forall}} \max_{x\in\mathcal{D}} f(x, w)\right), \tag{13}$$

то есть значение $\max\limits_{x\in\mathcal{D}} f(x, w)$ из (12) минимизируется по значениям параметров из I_1 и максимизируется по значениям параметров из I_2. В [22] решение (13) называется *слабым по* I_1 и *сильным по* I_2.

Понятия слабого и сильного оптимальных решений для интервальных задач ЛП использовались также в [24] для решений систем интервальных линейных неравенств. Сильное решение определяется в [24] как сильное решение системы интервальных линейных неравенств, то есть решение, допустимое для всех возможных значений интервально заданных коэффициентов линейных ограничений задачи, слабое решение —

как решение, которое удовлетворяет ограничениям задачи для некоторых значений из заданных интервалов.

Для рассматриваемой нами задачи ИДО на минимум решение $\check{x} \in \mathcal{D}$ задачи ИДО далее называется *слабым оптимальным решением* (или *слабым решением*), если оно является оптимальным для некоторых сценариев из $\boldsymbol{w}$:

$$(\exists w \in \boldsymbol{w})\big(f(\check{x}, w) = \min_{x\in\mathcal{D}} f(x, w)\big). \tag{14}$$

Решение $x^* \in \mathcal{D}$ задачи ИДО называется нами *сильным оптимальным решением* (или *сильным решением*), если оно является оптимальным для всех сценариев из $\boldsymbol{w}$:

$$(\forall w \in \boldsymbol{w})\big(f(x^*, w) = \min_{x\in\mathcal{D}} f(x, w)\big). \tag{15}$$

При разбиении множества интервальных коэффициентов I интервальной целевой функции (4) на множества I_1 и I_2 контролируемых и неконтролируемых параметров, и тех же обозначениях, которые использовались нами для формулировок выше, может быть сформулировано определение *слабого по* I_1 и *сильного по* I_2 решения задачи ИДО: $x^* \in \mathcal{D}$ — *слабое по* I_1 и *сильное по* I_2 решение задачи ИДО, если

$$(\exists w' \in \boldsymbol{w}^{\exists})(\forall w'' \in \boldsymbol{w}^{\forall})(w = w' + w'')\big(f(x^*, w) = \min_{x\in\mathcal{D}} f(x, w)\big). \tag{16}$$

Используемые нами далее определения слабых и сильных решений — это определения слабых по I_1 и сильных по I_2 решений для лексикографически крайних n-кванторных векторов. В первом случае все параметры являются контролируемыми: $I_1 = I$, $I_2 = \varnothing$ и $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}^{\exists}$. Во втором случае все параметры являются неконтролируемыми: $I_1 = \varnothing$, $I_2 = I$ и $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}^{\forall}$.

Рассмотрим как использовались концепции слабого и сильного оптимальных решений для задач ИДО.

В [39] слабые оптимальные и сильные оптимальные решения задачи ИДО об остовном дереве минимального веса именуются, соответственно, как «слабое дерево» и «перманентное дерево», в [40] слабые и сильные решения задачи ИДО о пути наибольшей длины в ориентированном графе — как «слабый путь» и «перманентный путь».

В [50] показано, что если сильное решение x^* для задачи ИДО существует, и все интервальные веса $\boldsymbol{w}_i$ не вырождены, то такое решение единственно и $x^* \in \mathcal{P}_{\preceq}$. В то же время, если множество Парето состоит из одного элемента, то из этого, вообще говоря, не следует, что этот элемент — сильное решение.

В работе [39, 40] для задач ИДО нахождения в ориентированном графе пути наибольшей длины и задачи об остовном дереве минимального веса вводится понятие *объединённого множества решений* Ξ (*united solution set*), как множества, содержащего слабые решения для всех возможных сценариев из $\boldsymbol{w}$:

$$\Xi = \big\{x \in \mathcal{D} \mid (\exists w \in \boldsymbol{w})\big(f(x, w) = \min_{y\in\mathcal{D}} f(y, w)\big)\big\}.$$

Минимальное объединённое множество решений $\Xi_{\min}$ задачи ИДО — это объединённое множество решений минимальной мощности. Для произвольной задачи ДО задача ИДО может быть поставлена как задача нахождения множества Ξ или множества $\Xi_{\min}$.

Имеем:

$$\mathcal{P}_{\preceq} \subseteq \Xi \subseteq \mathcal{P}_{\prec}.$$

В самом деле, пусть $x\in\mathcal{P}_{\preceq}$. Так как не существует других решений $y\in\mathcal{D}$, для которых $f(y,\underline{\boldsymbol{w}})<f(x,\underline{\boldsymbol{w}})$, то существуют сценарии из $\boldsymbol{w}$, для которых на x достигается минимум целевой функции, и значит $x\in\Xi$. Таким образом, $\mathcal{P}_{\preceq}\subseteq\Xi$.

Доказательство того, что $\Xi\subseteq\mathcal{P}_{\prec}$, может быть проведено методом «от противного». Пусть $x\in\Xi$ и $x\notin\mathcal{P}_{\prec}$. Тогда существует $y\in\mathcal{D}$ такое, что $y\prec x$, то есть $f(y,\overline{\boldsymbol{w}})\leq f(x,\underline{\boldsymbol{w}})$. Но так как $x\in\Xi$, то существует такое $w\in\boldsymbol{w}$, что x — оптимальное решение для этого сценария. Из чего следует противоречивая цепочка неравенств:

$$f(x,\underline{\boldsymbol{w}}) \leq f(x,w) \leq f(y,w) \leq f(y,\overline{\boldsymbol{w}}) < f(x,\underline{\boldsymbol{w}}).$$

Наихудшим сценарием для какого-либо решения $x\in\mathcal{D}$ называется такой сценарий $\overline{w}_x\in\boldsymbol{w}$, при котором для $e\in E_x$ имеем $w(e)=\overline{\boldsymbol{w}}(e)$, а для $e\notin E_x$ имеем $w(e)=\underline{\boldsymbol{w}}(e)$.

В [39] рассматривается задача ИДО нахождения в ориентированном графе пути наибольшей длины. В виде такой задачи может быть поставлена задача управления проектами. *Сеть проекта* — это ориентированный ациклический граф, в котором работам сопоставляются дуги, а событиям — вершины. Под событием понимается выполнение какой-либо работы. Сеть проекта задаёт ограничения на порядок выполнения работ, составляющих проект, а вес дуги соответствует выгоде, полученной от выполнения работы, которой сопоставляется дуга. Работа, которой сопоставляется дуга $(i,j)\in E$ графа G, может быть начата, если выполнены все работы, соответствующие дугам из множества $\{(k,i)\,|\,(k,i)\in E\}$.

Доказано, что слабое решение такой задачи является сильным решением, когда оно является оптимальным при наихудшем для него сценарии. Аналогичные теоремы — критерии сильной оптимальности слабого решения задачи ИДО — могут быть сформулированы и для других задач ИДО. В [40] такая теорема сформулирована для задачи об остовном дереве минимального веса, в [51] — для задачи о покрытии. Эта теорема верна и для других задач ИДО, получаемых для задач ДО вида (II).

В самом деле, пусть x — решение, оптимальное при наихудшем для него сценарии $\overline{w}_x$. Тогда для целевой функции вида (4) имеем:

$$f(x,\overline{w}_x) = \sum_{e\in E_x\setminus E_y}\overline{\boldsymbol{w}}(e) + \sum_{e\in E_x\cap E_y}\overline{\boldsymbol{w}}(e) \leq \sum_{e\in E_y\setminus E_x}\underline{\boldsymbol{w}}(e) + \sum_{e\in E_x\cap E_y}\overline{\boldsymbol{w}}(e) = f(y,\overline{w}_x).$$

Для произвольных весов $w(e)\in\boldsymbol{w}(e)$ элементов $e\in E_x\cap E_x$ будем иметь:

$$\sum_{e\in E_x\setminus E_y}\overline{\boldsymbol{w}}(e) + \sum_{e\in E_x\cap E_y} w(e) \leq \sum_{e\in E_y\setminus E_x}\underline{\boldsymbol{w}}(e) + \sum_{e\in E_x\cap E_y} w(e).$$

Поскольку

$$\sum_{e\in E_x\setminus E_y} w(e) \leq \sum_{e\in E_x\setminus E_y}\overline{\boldsymbol{w}}(e)$$

и

$$\sum_{e\in E_y\setminus E_x}\underline{\boldsymbol{w}}(e) \leq \sum_{e\in E_y\setminus E_x} w(e),$$

то

$$\sum_{e\in E_x\setminus E_y} w(e) + \sum_{e\in E_x\cap E_y} w(e) \leq \sum_{e\in E_y\setminus E_x} w(e) + \sum_{e\in E_x\cap E_y} w(e).$$

То есть $f(x,w)\leq f(y,w)$ при всех $w\in\boldsymbol{w}$, и значит x — сильное решение.

Однако, сильного решения для задачи ИДО, как правило, не существует. Проверка какого-либо слабого решения на сильную оптимальность при произвольном $w \in \boldsymbol{w}$ требует решения индивидуальной задачи ДО, получаемой для NP-трудной задачи. Критерии подобного рода могут вычислительно эффективно применяться при решении задач ИДО, получаемых из полиномиально разрешимых задач ДО вида (II).

В [39, 40] вводятся понятия слабых и сильных рёбер в графе. Под *слабыми рёбрами* понимаются рёбра, принадлежащие каким-либо слабым решениям, под *сильными* — каким-либо сильным решениям. Эти понятия также могут быть обобщены и отнесены к элементам $e \in E$ из постановки (II) для произвольной задачи ДО на графе или гиперграфе, для которой ставится задача ИДО. В [39] для задачи о поиске пути наибольшей длины в графе доказывается, что ребро является сильным только в том случае, если для всех сценариев, при которых это ребро имеет максимальный вес, а все остальные рёбра — минимальный, это ребро входит в самый длинный путь. Доказывается, в частности, что ребро является сильным, если оно входит во все слабые решения, принадлежащие $\Xi_{\min}$ для задачи ИДО. В случае существования сильного решения обнаружение таких рёбер при его поиске позволяет снижать размерность задачи.

В работе также показывается, что как абсолютное робастное решение, так и относительное робастное решение являются слабыми решениями ИДО. Доказывается, что сценарий, на котором достигается максимум функции (4), является наихудшим для относительного робастного решения. В [39] доказывается, что для задачи о пути наибольшей длины в графе существует робастное решение, содержащее все сильные рёбра в графе. В [40] показано, что аналогичное утверждение верно и для задачи о минимальном остовном дереве. Показано, что для задачи ИДО об остовном дереве минимального веса абсолютное робастное решение может быть найдено за полиномиальное время нахождением решения для сценария $w = (\overline{\boldsymbol{w}}_1, \ldots, \overline{\boldsymbol{w}}_n)$.

В [52] рассматривается задача о кратчайшем пути между двумя выделенными вершинами в графе с интервальными весами рёбер. Пусть $\boldsymbol{w}_x$, $\boldsymbol{w}_y$ — множества сценариев из $\boldsymbol{w}$, при которых оптимальными являются, соответственно, решения $x, y \in \mathcal{D}$. Доказывается, что если в задаче ИДО интервальные веса всех $e \in E$ невырождены, то множества $\boldsymbol{w}_x$ и $\boldsymbol{w}_y$ могут пересекаться только по границе. На множестве всех сценариев $\boldsymbol{w}$ задаётся вероятностная мера μ, в соответствии с которой определяется вероятность $\mathsf{P}(x)$ слабого решения x:

$$\mathsf{P}(x) = \frac{\mu(\boldsymbol{w}_x)}{\mu(\boldsymbol{w})}.$$

Таким образом, для сравнения решений из $\mathcal{D}$ используются не только интервалы возможных значений целевой функции, но и вероятности их получения, что позволяет оценивать средние потери, выражаемые значением целевой функции. В качестве решения задачи ИДО предлагается выбирать слабое решение с наибольшей вероятностью.

Для оценивания значений $\mu(\boldsymbol{w}_x)$ в [52] используется метод имитационного моделирования, под которым понимается генерирование случайных весов в заданных интервалах и решение индивидуальных задач ДО для этих весов. Исходя из полученных частот слабых решений задачи ИДО, оцениваются их вероятности. Эти вероятности определяются вероятностным распределением, в соответствии с которым генерируются значения весов рёбер.

Такой выбор предпочтительного слабого решения обладает тем недостатком, что может обоснованно осуществляться лишь для задач ИДО небольших размерностей. В противном случае вероятность наиболее вероятного слабого решения может быть слишком мала для обоснования его выбора, равно как и отличия в вероятностях слабых решений могут оказываться несущественными для того, чтобы отдавать предпочтение какому-либо из них при решении прикладных задач. Причиной этого является то, что множество всех слабых решений $\varXi$ для задач ИДО даже относительно небольших размерностей при достаточной ширине интервалов коэффициентов целевой функции (интервалов весов) может обладать большой мощностью.

В [53, 54] и других работах того же автора предлагается следующий подход к решению задач ИДО. Аналогично рассмотренному выше подходу к решению задач на графах [36, 37, 46, 47, 48] из задачи ИДО с интервальной целевой функцией $\boldsymbol{f}(x)$ вида (4) получаются две *граничные задачи* ДО с тем же множеством допустимых решений $\mathcal{D}$: задача ДО с целевой функцией $f(x, \underline{\boldsymbol{w}})$, и задача ДО с целевой функцией $f(x, \overline{\boldsymbol{w}})$. Ищется решение из $\mathcal{D}$, которое одновременно являлось бы оптимальным для обеих этих задач ДО. Если такого решения нет, то объявлется, что решение задачи ИДО отсутствует. В частности, этот подход применяется в [53, 54] к решению задачи о назначениях.

В [53] используется частичный порядок на $\mathbb{IR}$, который задаётся с помощью неравенства интервалов, определяемого следующим образом: $\boldsymbol{a} \leq \boldsymbol{b}$ если одновременно выполнены условия $\underline{\boldsymbol{a}} \leq \underline{\boldsymbol{b}}$ и $\overline{\boldsymbol{a}} \leq \overline{\boldsymbol{b}}$. Интервалы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ считаются несравнимыми, если один из них включает другой, то есть $\boldsymbol{a} \subset \boldsymbol{b}$ или $\boldsymbol{b} \subset \boldsymbol{a}$. Задача минимизации потерь в задаче о назначениях ставится как задача нахождения решения из $\mathcal{D}$, дающего минимальное значение интервальной целевой функции в соответствии с введённым частичным порядком на $\mathbb{IR}$. В [54] это определение частичного порядка обобщается, что позволяет для любой задачи ИДО иметь оптимальное решение, под которым понимается решение задачи ДО с весами w_i равными центрам интервалов $\boldsymbol{w}_i$: $w_i = (\overline{\boldsymbol{w}}_i + \underline{\boldsymbol{w}}_i)/2$. Утверждается, что в результате этой замены интервальных весов на неинтервальные задача ИДО «переходит в эквивалентную ей обычную задачу ДО, которую можно решить известными методами» [53]. Основанием для этого является теорема о том, что достаточным условием нахождения двух интервалов в заданном отношении ($<$, $\leq$ или $=$) в соответствии с перенесённым таким образом с $\mathbb{R}$ на $\mathbb{IR}$ линейным порядком является нахождение в этом отношении их центров.

Однако, такой подход эквивалентен использованию частичного порядка, задаваемого неравенством интервалов в центральном смысле, в соответствии с которым все интервалы с одинаковым центром равны независимо от их ширины. То есть теряется специфика задачи ИДО, состоящая в интервальной неопределённости параметров задачи.

В [55] рассматривается задача ИДО, в которой как целевая функция, так и ограничения задачи являются интервальными. Нахождение решения такой задачи также сводится к решению двух граничных задач ДО. В случае, если пересечение множеств решений граничных задач ДО не пусто, то решением объявляется пересечение этих множеств. В противном случае ищется множество решений оптимальных по Парето. В [56] аналогичный подход применён к решению многокритериальной задачи ИДО о назначениях.

В целом, подход, представленный в [53, 54, 55, 56], можно охарактеризовать как основанный на замене решения задачи ИДО решением нескольких задач ДО — граничных задач или задач, соответствующих средним значениям интервалов возможных весов. В результате, в качестве оптимального решения предлагается использовать подмножество множества $\varXi$ небольшой мощности. Поскольку рассматривается лишь небольшое количество сценариев, используя такой подход, как правило, нельзя судить о множестве значений целевой функции для оптимальных решений при различных сценариях, нельзя получать другую информацию о них.

4.3. Объединённое множество приближённых решений задачи ИДО

Слабое приближённое решение задачи ИДО — это α-приближённое решение для некоторых сценариев из $\boldsymbol{w}$ для заданного α. То есть $\tilde{x} \in \mathcal{D}$ — слабое приближённое решение, если

$$(\exists w \in \boldsymbol{w})\big(f(\tilde{x}, w) \leq \alpha \min_{x \in \mathcal{D}} f(x, w)\big).$$

Достаточно общий подход к нахождению приближённых решений задач ДО реализуется жадными алгоритмами. С помощью этих алгоритмов последовательно определяются значения компонент приближённых решений, исходя из информации, определяемой входными данными индивидуальных задач ДО. Решение x формируется выбором элементов $e \in E$ в множество E_x с учётом их веса $w(e)$ и других параметров индивидуальной задачи ДО. Для этого используется *функция выбора*, с помощью которой на каждой итерации работы жадного алгоритма определяется элемент e, включаемый в E_x. Работа жадного алгоритма заканчивается, когда таким образом получено допустимое решение $x \in \mathcal{D}$ задачи ДО.

Показано [57], что с помощью жадных алгоритмов может быть получено оптимальное решение задач ДО вида (II), множество допустимых решений которых представляет собой матроид. Для некоторых задач ДО, в частности, для задачи о покрытии множества, при небольшой вычислительной сложности жадные алгоритмы являются асимптотически лучшими полиномиальными прилижёнными алгоритмами (см., к примеру, работы [58, 59]).

В [51, 60] представлен подход к нахождению слабых приближённых решений для задачи о покрытии с интервальной целевой функцией с помощью интервального жадного алгоритма. Этот алгоритм представляет собой обобщение жадного алгоритма решения задачи о покрытии множества для случая весов из $\mathbb{R}_+$ на случай весов из $\mathbb{IR}_+$. Предложенный в [51, 60] подход при модификации функции выбора интервального жадного алгоритма может быть применён и для других задач ИДО, получаемых для задач ДО вида (II).

В задаче о покрытии задано множество вершин $V = \{1, \ldots, m\}$ гиперграфа G и некоторое множество его подмножеств (гиперрёбер) $E \subset 2^V$. Покрытием называется такой набор гиперрёбер из E, что для любой вершины из V в этом наборе найдётся хотя бы одно гиперребро, содержащее её (*инцидентное* ей). Заданы веса $w(e)$ гиперрёбер $e \in E$. Вес покрытия равен сумме весов входящих в него гиперрёбер. Необходимо найти покрытие минимального веса для вершини графа G.

В [51] вводится понятие объединённого множества приближённых решений. Множество, для некоторого α содержащее α-приближённые решения для всех сценариев $w \in \boldsymbol{w}$, называется *объединённым множеством приближённых решений* задачи ИДО (*united set of approximate solutions*) и обозначается как $\tilde{\Xi}_\alpha$:

$$\tilde{\Xi}_\alpha = \big\{x \in \mathcal{D} \;\big|\; (\exists w \in \boldsymbol{w})\big(f(x, w) \leq \alpha \min_{y \in \mathcal{D}} f(y, w)\big)\big\}.$$

Интервальный жадный алгоритм позволяет получить $\tilde{\Xi}_\alpha$, где значение α определяется оценкой точности жадного алгоритма для соответствующей задачи ДО. Для задачи о покрытии множества мощности m имеем $\alpha = \sum_{k=1}^{m} 1/k \leq \ln m + 1$ [61]. Интервальный жадный алгоритм даёт также интервалы значений весов, при которых могут быть получены решения из $\tilde{\Xi}_\alpha$, что позволяет найти интервалы значений целевой функции для них. Если на интервалах весов задано вероятностное распределение, то алгоритм даёт вероятности решений из $\tilde{\Xi}_\alpha$, понимаемые как вероятности получения сценариев, при которых жадный алгоритм будет давать эти решения. Это, в свою очередь, позволяет определить вероятностное распределение на множестве возможных значений целевой функции.

Количество слабых приближённых решений, содержащихся в $\tilde{\Xi}_\alpha$, определяет вычислительную сложность его нахождения. В [60] показывается, что зависимость вычислительной сложности нахождения $\tilde{\Xi}_\alpha$ от ширины интервалов весов $\boldsymbol{w}_i$ является неубывающей кусочно-постоянной функцией. Если мощность множества $\tilde{\Xi}_\alpha$ не ограничена полиномом от размерности задачи, то вычислительная сложность интервального жадного алгоритма экспоненциальна.

В [60] ставится задача коррекции численно неразрешимых задач о покрытии с интервальными весами, которая может быть поставлена для произвольной задачи ИДО. Под *коррекцией* задачи ИДО понимается такая минимальная в соответствии с какимлибо критерием модификация её целевой функции, при которой численно неразрешимая задача ИДО становится численно разрешимой за время, не превышающее заданного. Модификация целевой функции, понимаемая как уменьшение ширины интервалов возможных значений её коэффициентов, может трактоваться как такое уточнение измерений, при котором для задачи ИДО с тем же множеством $\mathcal{D}$ может быть численно получено множество Ξ или множество $\tilde{\Xi}_\alpha$. Подразумевается, что минимальная коррекция задачи ИДО требует минимальных затрат, необходимых для дополнительных измерений неточно заданных параметров.

5. Выбор концепции оптимальности при решении задачи ИДО

Выше нами был проведён обзор интервальных подходов к решению задач ИДО и рассмотрены используемые ими концепции оптимальности — множество решений оптимальных по Парето, концепции сильных и слабых оптимальных решений, объединённых множеств оптимальных и приближённых решений и некоторые другие. Выбор той или иной концепции оптимальности решений во многом определяет сам подход к решению задачи ИДО, обуславливает вычислительную сложность получаемых с его помощью алгоритмов. Оценим предпочтительность вариантов выбора концепции оптимальности при решении задачи ИДО.

Очевидно, что если существует сильное решение задачи ИДО, то выбрано должно быть оно. Однако, как правило, сильного решения для индивидуальной задачи ИДО не существует.

Поскольку множество Парето $\mathcal{P}_{\prec}$ может содержать решения, которые не являются оптимальными ни для каких возможных сценариев из $\boldsymbol{w}$ [50], то для решения прикладных задач эта концепция оптимальности не применима. Таким образом, выбор концепции оптимальности в случае отсутствия сильного решения необходимо делать между $\mathcal{P}_{\preceq}$, Ξ и $\tilde{\Xi}_\alpha$.

В случае, если нахождение $\mathcal{P}_{\preceq}$ для задачи может быть реализовано численно, то в качестве решения может быть выбрано оно. Однако, если численно реализуемо нахождение объединённого множества решений Ξ или объединённого множества приближённых решений $\tilde{\Xi}_\alpha$ и их характеристик (интервалов возможных значений целевой функции, вероятностей решений, вероятностного распределения на множестве значений целевой функции и др.), то, в зависимости от постановки и специфики решаемой прикладной задачи, в качестве решения должно быть выбрано одно из них. Такой выбор предпочтителен, поскольку Ξ и $\tilde{\Xi}_\alpha$ дают большее количество информации, которая может быть использована при принятии решения в ситуации неопределённости. В том числе, из этих множеств могут быть выделены решения, содержащиеся в множестве $\mathcal{P}_{\preceq}$ или их приближения.

Список литературы / References

[1] **Гэри М., Джонсон Д.** Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. Москва: Мир. 1982: 419.
Garey M., Johnson D. Computers and intractability: a guide to the theory of NP-completness. San-Francisco: Freeman. 1978: 419.

[2] **Новицкий П.В., Зограф И.А.** Оценка погрешностей результатов измерений. Ленинград: Энергоатомиздат. Ленинградское отделение. 1991: 304.
Novitskiy P.V., Zorgraf I.A. Estimation of errors in measurements results. Leningrad: Energoatomizdat. Leningradskoe otdelenie. 1991: 304. (In Russ.)

[3] **Орлов А.И.** Часто ли распределение результатов наблюдений является нормальным? Заводская лаборатория. 1991; 57 (7):64–66.
Orlov A.I. Is it often happens that the results of observations are normally distributed? Zavodskaya Laboratoria. 1991; 57 (7):64–66. (In Russ.)

[4] **Перепелица В.А., Сергиенко И.В.** Исследование одного класса целочисленных многокритериальных задач. Журнал вычислительной математики и математической физики. 1988; 28 (3):400–419. DOI:10.1016/0041-5553(88)90144-9.
Perepelitsa V.A., Sergienko I.V. A study of one class of integer multicriterion problems. USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics. 1988; 28 (2):63–75. DOI:10.1016/0041-5553(88)90144-9.

[5] **Kearfott R.B., Kreinovich V.** Applications of interval computations: an introduction. R.B. Kearfott et al. (eds.). Applications of Interval Computations, Kluwer, Dordrecht. 1996: 1–22. DOI:10.1007/978-1-4613-3440-8_1.

[6] IEEE Standard for Interval Arithmetic. In IEEE Std 1788-2015. New York: The Institute of Electrical and Electronics Engineers, Inc. 2015: 79. DOI:10.1109/IEEESTD.2015.7140721.

[7] **Allen J.F.** Maintaining knowledge about temporal intervals. Communications of the ACM. 1983; 26 (11):832–843. DOI:10.1145/182.358434.

[8] **Шарый С.П.** Конечномерный интервальный анализ. Адрес доступа: http://www.nsc.ru/interval/Library/InteBooks/SharyBook.pdf (дата обращения 21.09.2021)
Shary S.P. Finite-dimensional interval analysis. Available at: http://www.nsc.ru/interval/Library/InteBooks/SharyBook.pdf (accessed 21.09.2021) (In Russ.)

[9] **Фишберн П.** Теория полезности для принятия решений. Москва: Наука. 1978: 352.
Fishburn P. Utility Theory for decision making. New York: Wiley. 1970: 234.

[10] **Вощинин А.П., Сотиров Г.Р.** Оптимизация в условиях неопределённости. Москва: Изд-во МЭИ, София: Техника. 1989: 224.
Voshchinin A.P., Sotirov G.P. Optimization under uncertainty. Moskva: MEI, Sofia: Tekhnika. 1989: 224.

[11] **Tsoukias A., Vincke Ph.** A characterization of PQI interval orders. Discrete Applied Mathematics. 2003: 122 (2):387–397. DOI:10.1016/S0166-218X(02)00256-1.

[12] **Ащепков Л.Т., Давыдов Д.В.** Показатель интервального неравенства: свойства и применение. Вычислительные технологии. 2006; 11 (4):13–22.
Ashchepkov L.T., Davydov D.V. An indicator of interval inequality: its properties and application. Computational Technologies. 2006; 11 (4):13–22. (In Russ.)

[13] **Hu B., Wang S.** A novel approach in uncertain programming. Part I: new arithmetic and order relation of interval numbers. Journal of Industrial and Management Optimization. 2006; 2 (4):351–371. DOI:10.3934/jimo.2006.2.351.

[14] **Collins D., Hu C.** Studying interval valued matrix games with fuzzy logic. Journal of Soft Computing. 2008: 12 (2):147–155. DOI:10.1007/s00500-007-0207-6.

[15] **Kouvelis P., Yu G.** Robust discrete optimization and its applications. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. 1997: 358. DOI:10.1007/978-1-4757-2620-6.

[16] **Kaspersky A., Zielinski P.** Robust discrete optimization under discrete and interval uncertainty: a survey. International Series in Operations Research and Mangement Science. 2016; 113–143. DOI:10.1007/978-3-319-33121-8_6.

[17] **Kasperski A., Zielinski P.** Robust independent set problems on interval graphs. Optimization Letters. 2015; (9):427–436. DOI:10.1007/S11590-014-0773-3.

[18] **Soyster A.L.** Convex programming with set inclusive constraints and applications to inexact linear programming. Operations Research. 1973; 21 (5):1154–1157. DOI:10.1287/opre.21.5.1154.

[19] **Falk J.E.** Exact solutions of inexact linear programs. Operations Research. 1976; 24 (4):783–786. DOI:10.1287/opre.24.4.783.

[20] **Ватолин А.А.** О задачах линейного програмирования с интервальными коэффициентами. Журнал вычислительной математики и математической физики. 1984; 24 (11):1629–1637. DOI:10.1016/0041-5553(84)90003-X.
Vatolin A.A. On the problems of linear programming with interval coefficients. USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics. 1984; 24 (6):18-23. DOI:10.1016/0041-5553(84)90003-X.

[21] **Агаян Г.М., Рютин А.А., Тихонов А.Н.** О задаче линейного программирования с приближёнными данными. Журнал вычислительной математики и математической физики. 1984; 24 (9):1303–1311. DOI:10.1016/0041-5553(84)90149-6.
Agayan G.M., Ryutin A.A., Tikhonov A.N. The problem of linear programming with approximate data. USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics. 1984; 24 (5):14–19. DOI:10.1016/0041-5553(84)90149-6.

[22] **Ерёмин И.И.** Противоречивые модели оптимального планирования. Москва: Наука. 1988: 160.
Eremin I.I. Contradictory models of optimal planning. Moskva: Nauka. 1988: 160. (in Russ.).

[23] **Rohn J.** Complexity of some linear problems with interval data. Reliable Computing. 1997; 3 (3):315–323. DOI:10.1023/A:1009987227018.

[24] **Фидлер М., Недома Й., Рамик Я., Рон И., Циммерман К.** Задачи линейной оптимизации с неточными данными. Москва–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований. 2008: 288.

Fiedler M., Nedoma J., Ramik J., Rohn J., Zimmerman K. Linear optimization problems with inexact data. New York: Springer Science+Business Media, Inc. 2006: 288. DOI:10.1007/0-387-32698-7.

[25] **Libura M.** Integer programming problems with inexact objective function. Control and Cybernetics. 1980; 9 (4):189–202.

[26] **Рощин В.А., Семёнова Н.В., Сергиенко И.В.** Декомпозиционный подход к решению некоторых задач целочисленного программирования с неточными данными. Журнал вычислительной математики и математической физики. 1990; 30 (5):786–791. DOI:10.1016/0041-5553(90).90197-z

Roshchin V.A., Semenova N.V., Sergienko I.V. A decomposition approach to the solution of some integer programming problems with inexact data. USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics. 1990; 30 (3):107–112. DOI:10.1016/0041-5553(90).90197-z

[27] **Семёнова Н.В.** Решение одной задачи обобщённого целочисленного программирования. Кибернетика. 1984; (5):25–311.

Semenova N.V. Solution of a problem of the generalized integer programming. Kibernetika. 1984; (5):25–31. (In Russ.)

[28] **Roshchin V.A., Sergienko I.V.** Solution of integer programming problems with inexact data. Cybernetics and System Analysis. 1994; 30 (5):666–671. DOI:10.1007/bf02367747.

[29] **Sergienko I.V., Semenova N.V.** Integer programming problems with inexact data: exact and approximate solutions. Cybernetics and System Analysis. 1995; 31 (6):842–851. DOI:10.1007/bf02366621.

[30] **Sergienko I.V., Shylo V.P.** Problems of discrete optimization: challenges and main approaches. Cybernetics and System Analysis. 2006; 42 (4):465–481. DOI:10.1007/s10559-006-0086-3.

[31] **Beraldi P., Ruszczynski A.** The probabilistic set-covering problem. Operations Research. 2002; 50 (6):956–967. DOI:10.1287/opre.50.6.956.345.

[32] **Fischetti M., Monaci M.** Cutting plane versus compact formulations for uncertain (integer) linear programs. Mathematical Programming Computation. 2012; 4 (3):239–273. DOI:10.1007/s12532-012-0039-y.

[33] **Kaspersky A.** Discrete optimization with interval data. Minmax regret and fuzzy approach. Studies in Fuzziness and Soft Computing. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg. 2008; (228): 236. DOI:10.1007/978-3-540-78484-5.

[34] **Hwang M.J., Chiang C.I., Liu Y.H.** Solving a fuzzy set-covering problem. Mathematical and Computer Modelling. 2004; 40 (7):861–865. DOI:10.1016/j.mcm.2004.10.015.

[35] **Chiang C.I., Hwang M.J., Liu Y.H.** An alternative formulation for certain fuzzy set-covering problems. Mathematical and Computer Modelling. 2005; 42 (3–4):363–365. DOI:10.1016/j.mcm.2004.05.012.

[36] **Kozina G.L., Perepelitsa V.A.** Interval spanning trees problem: solvability and computational complexity. Interval Computations. 1994; (1):42–50.

[37] **Перепелица В.А., Тебуева Ф.Б.** Задачи дискретной оптимизации с интервальными параметрами. Журнал вычислительной математики и математической физики. 2010; 50 (5):836–847. DOI:10.1134/S0965542510050052.

Perepelitsa V.A., Tebueva F.B. Discrete optimization problems with interval parameters. Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2010. 50 (5):795–804. DOI:10.1134/S0965542510050052.

[38] **Demchenko A.I.** Modeling the problem of transport network synthesis under conditions of uncertain initial information. International Conference of Industrial Engineering. Procedia Engineering. 2015; (129):676–680. DOI:10.1016/j.proeng.2015.12.090.

[39] **Yaman H., Karasan O.E., Pinar M.C.** Longest path problem with interval data. Technical Report 9908, Department of Industrial Engineering, Bilkent University, Ankara, Turkey. 1999: 31.

[40] **Yaman H., Karasan O.E., Pinar M.C.** Minimum spanning tree problem with interval data. Technical Report 9909, Department of Industrial Engineering, Bilkent University, Ankara, Turkey. 1999: 16.

[41] **Aissi H., Bazgan C., Vanderpooten D.** Approximation of min-max and min-max regret versions of some combinatorial optimization problems. European Journal of Operational Research. 2007; 179 (2):281–290. DOI:10.1016/j.ejor.2006.03.023.

[42] **Yu G., Kouvelis P.** Complexity results for a class of min-max problems with robust optimization applications. In: P.M. Pardalos (ed.) Complexity in Numerical Optimization. World Scientyfic. 1993:501–511. DOI:10.1142/9789814354363_0023.

[43] **Yu G., Yang J.** On the robust shortest path problem. Computers and Operations Research. 1998; 25(6):457–468. DOI:10.1016/S0305-0548(97)00085-3.

[44] **Bertsimas D., Sim M.** Robust discrete optimization and network flows. Mathematical Programming. 2003; (98):49–71. DOI:10.1007/s10107-003-0396-4.

[45] **Льюс Р.Д., Райфа Х.** Игры и решения. Введение и критический обзор. Москва: Изд-во иностранной литературы. 1961: 642.
Luce R.D., Raiffa H. Games and decisions: introduction and critical survey. New York: Dover Publications Inc. 1989: 544.

[46] **Перепелица В.А., Тебуева Ф.Б., Шенкао Т.М.** О вычислительной сложности интервальных задач на графах. Известия вузов. Северо-кавказский регион. Естественные науки. Приложение. 2006; (12):18–30.
Perepelitsa V.A., Tebueva F.B., Shenkao T.M. On computational complexity of interval problems on graphs. Bulletin of Higher Education Institutes North Caucasus Region. Natural Sciences. 2006; (12):18–30. (In Russ.)

[47] **Перепелица В.А., Козин И.В., Максишко Н.К.** Задачи оптимизации на графах с интервальными параметрами. Кибернетика и системный анализ. 2009; 45 (2):3–14.
Perepelitsa V.A., Kozin I.V., Maksishko N.K. Optimization problems on graphs with interval parameters. Cybernetics and System Analysis. 2009; 45 (2):3–14. (In Russ.)

[48] **Kozina G.L., Perepelitsa V.A.** Interval discrete models and multiobjectivity. Complexity estimates. Interval Computations. 1993; (1):51–59.

[49] **Шапошникова О.И., Темирова Л.Г.** Интервальные задачи об остовных деревьях с топологическим критерием. Научный журнал КубГАУ. 2016; 115 (01):369–378.
Shaposhnikova O.I., Temirova L.G. Interval spanning tree problems with topological criterion. Scientific Journal of KubSAU. 2016; 115 (01):369–378. (In Russ.)

[50] **Kozina G.L.** Discrete optimization problems with interval data: Pareto set of solutions or set of weak solutions? Reliable Computing. 2004; 10 (6):469–487. DOI:10.1023/B:REOM.0000047095.22096.16.

[51] **Пролубников А.В.** Задача о покрытии множества с интервальными весами подмножеств и жадный алгоритм её решения. Вычислительные технологии. 2015; 20 (6):70–84.
Prolubnikov A.V. The set cover problem with interval weights of subsets and the greedy algorithm of its solution. Computational Technologies. 2015; 20 (6):70–84. (In Russ.)

[52] **Козина Г.Л.** Правило выбора решений оптимизационных задач на графах с интервальными параметрами. Труды XVIII Байкальской международной школы-семинара. Ирутск-Северобайкальск, 2–8 июля 2005 г. 2005; (4):51–55.
Kozina G.L. The rule of selection of solutions of optimization problems on graphs with interval parameters. Proceedings of 13-th Baikal International School-seminar Optimization Methods and Their Applications. Volume 4. Interval Analysis. Irkutsk-Severobaikalsk. Irkuktsk. 2005; (4):51–55. (In Russ.)

[53] **Левин В.И.** Дискретная оптимизация в условиях интервальной неопределённости. Автоматика и телемеханика. 1992; (7):97–106.
Levin V.I. Discrete optimization under interval uncertainty. Automation and Remote Control. 1992; (7):97–106. (In Russ.)

[54] **Левин В.И.** Сравнение интервалов и оптимизация в условиях неопределённости. Вестник Тамбовского государственного университета. 2002; 7 (3):383–389.
Levin V.I. Comparison of intervals and optimization under uncertainty. Tambov University Review. 2002; 7 (3):383–389. (In Russ.)

[55] **Медведев С.Н., Медведева О.А.** О решении интервальной задачи линейной целочисленной оптимизации. Вестник Воронежского государственного университета. Серия «Системный анализ и информационные технологии». 2016; (4):37–42.
Medvedev S.N., Medvedeva O.A. On the solution of interval linear integer optimization problem. Proceedings of Voronezh State University. Series: Systems Analysis and Information Technologies. 2016; (4):37–42. (In Russ.)

[56] **Попов В.П., Майорова И.В.** Интервальный подход к оптимизации решения многокритериальной задачи о назначениях. Прикладная информатика. 2015; 10, 3 (57):122–131.
Popov V.P., Mayorova I.V. An interval approach to solution of the multicriterial assignment problem. Journal of Applied Informatics. 2015; 10, 3 (57):122–131. (In Russ.)

[57] **Papadimitriou C.H., Steiglitz K.** Combinatorial optimization: algorithms and complexity. New Jersey: Prentice Hall. 1987: 496.

[58] **Feige U.** A threshhold of $\ln n$ for approximating set cover. Journal of the ACM. 1998; 45 (4):634–652. DOI:10.1145/285055.285059.

[59] **Frieze A., Szpankowski W.** A greedy algorithm for the shortest common superstring is asymptotically optimal. Algorithmica. 1998; 21 (1):21–36. DOI:10.1007/PL00009207.

[60] **Пролубников А.В.** Об одном подходе к решению задачи о покрытии с интервальными весами и его вычислительной сложности. Вычислительные технологии. 2017; 22 (2):115–126.
Prolubnikov A.V. On an approach to the set cover problem with interval weights and on its computational complexity. Computational Technologies. 2017; 22 (2):115–126. (In Russ.)

[61] **Chvatal V.** A greedy heuristic for the set-covering problem. Mathematics of Operation Research. 1979; 4 (3):233–235. DOI:10.1287/moor.4.3.233.